2015 Francia: due attacchi Isis a Parigi in gennaio e novembre provocano più di 200 morti.

Italia: Sergio Mattarella è il nuovo Presidente della Repubblica. Oltre 21 milioni di visitatori a Milano per l'Expo dedicato a nutrire il pianeta.

Le crisi in Libia e Siria si inaspriscono e si intrecciano con il dramma dei migranti.

2016 Terremoti in centro Italia in agosto e ottobre (297 morti).

Turchia: dura repressione del Presidente Erdogan dopo un tentato golpe.

Regno Unito: con il referendum Brexit decide l'uscita dalla Ue.

Usa: il repubblicano Donald Trump è il nuovo Presidente statunitense.

Esempi

1 La "battaglia del grano" fu:

A una rivolta di contadini tedeschi guidata da Thomas Müntzer
B un'insurrezione popolare a Parigi sfociata nella presa della Bastiglia
C una campagna fascista volta a rendere l'Italia meno dipendente dalle importazioni
D l'apice della rivolta dei cosacchi contro l'esercito russo
E la guerra tra Venezia e l'Impero ottomano per il controllo del Mediterraneo

Le alternative contemplano episodi storici accaduti in Europa tra XVI e XX secolo. La risposta esatta è la **C**: la "battaglia del grano" fu insieme a "quota 90" una delle più note scelte economico-finanziarie dell'Italia mussoliniana. In particolare, la battaglia del grano fu lanciata dal Duce fin dal 1925, ripristinando i dazi doganali, e, pur riuscendo nell'intento di ridurre le importazioni di frumento, non portò mai all'autosufficienza.

2 Tutte le seguenti citazioni sono tratte dal Manifesto del Partito Comunista, tranne una: quale?

A La storia di ogni civiltà civile sinora esistita è storia di lotta di classi
B I proletari non hanno nulla da perdere se non le proprie catene. Essi hanno un mondo da guadagnare
C Lavoratori di ogni Paese, unitevi!
D La nostra epoca, l'epoca del regime feudale, possiede questa distinta caratteristica: ha semplificato l'antagonismo fra le classi
E L'intera società si va scindendo sempre di più in due grandi campi nemici, in due grandi classi direttamente contrapposte l'una all'altra: borghesia e proletariato

Pubblicato a Londra in inglese da Marx e Engels nel fatidico 1848, il *Manifesto del Partito Comunista* quando parla di "nostra epoca" non si riferisce certo a quella feudale, come erroneamente sostenuto dall'alternativa **D** (soluzione del quesito), ma ai primi quattro decenni del XIX secolo, che con il diffondersi del modo di produzione capitalistico e industriale aveva segnato il definito superamento degli ultimi residui della società feudale.

3 Nel dopoguerra, Pietro Nenni e Alcide De Gasperi erano i leader rispettivamente dei partiti:

A Socialista e Comunista
B Socialista e Liberale
C Democristiano e Repubblicano
D Socialista e Democristiano
E Liberale e Democristiano

Pietro Nenni (1891-1980), socialista dal 1921, fu direttore dell'Avanti e più volte segretario del PSI; De Gasperi (1881-1954) fu uno dei fondatori della Democrazia Cristiana e suo segretario; guidò la DC alla vittoria elettorale del 18 aprile 1948, ottenendo la maggioranza assoluta. La risposta esatta è dunque la **D**.

© Alpha Test

1 Scalari e vettori

1.1 Grandezze scalari

Misurare una grandezza fisica (come la lunghezza di un tavolo o la durata di un evento) significa fissare un'opportuna **unità di misura** (per esempio, rispettivamente, il metro o il minuto) e stabilire quante volte essa è contenuta nella grandezza data.

Si dice **scalare** una grandezza che può essere descritta indicando un numero, eventualmente accompagnato dalla relativa unità di misura.

Il record del mondo sui 100 metri piani e l'altezza del monte Everest sono grandezze scalari (un tempo e una lunghezza, rispettivamente). Allo stesso modo, anche se non ha alcuna unità di misura, la percentuale di bambini maschi in una classe elementare è una grandezza scalare: viene espressa infatti con un *numero puro*.

1.1.1 Sistema internazionale delle unità di misura

In fisica si definiscono sette grandezze **fondamentali** fra loro indipendenti, tra cui la lunghezza, la massa e il tempo. Tutte le altre prendono il nome di grandezze **derivate** nel senso che si possono ricavare tramite opportune "ricette" matematiche a partire dalle grandezze fondamentali.

La velocità è una grandezza derivata definita come rapporto di due grandezze fondamentali:

$$\text{velocità} = \frac{\text{lunghezza}}{\text{tempo}}$$

Per convenzione, il sistema di unità di misura attualmente adottato è il Sistema internazionale (SI) o MKS (dalle iniziali dei simboli per le unità di misura metro, chilogrammo e secondo); in questo sistema le sette grandezze fondamentali hanno le unità di misura riportate nella tabella seguente.

Grandezza fondamentale	Unità di misura nel SI	Simbolo
lunghezza	metro	m
massa	chilogrammo	kg
tempo	secondo	s
intensità di corrente	ampere	A
temperatura	kelvin	K
intensità luminosa	candela	cd
quantità di materia	mole	mol

Il SI non è il solo sistema di unità di misura esistente; un altro molto usato è il CGS (dalle iniziali di centimetro, grammo e secondo), nel quale per lunghezza, massa e tempo si usano rispettivamente le unità di misura centimetro, grammo e secondo. In questo testo, in generale, si utilizzano le unità di misura del SI.

In Appendice è riportata una tabella di conversione fra SI e CGS.

1.1.2 | Unità di misura: multipli e sottomultipli

In entrambi i sistemi SI e CGS si aggiungono prefissi alle unità di misura in modo da rendere i numeri più "maneggevoli". La tabella seguente riporta i prefissi più usati.

Multipli				Sottomultipli			
deca (da)	10^1	mega (M)	10^6	deci (d)	10^{-1}	micro (μ)	10^{-6}
etto (h)	10^2	giga (G)	10^9	centi (c)	10^{-2}	nano (n)	10^{-9}
chilo (k)	10^3	tera (T)	10^{12}	milli (m)	10^{-3}	pico (p)	10^{-12}

Questi prefissi si usano moltiplicando la corrispondente potenza di 10 per le unità di misura a cui vengono affiancati:

$$1 \text{ millisecondo} = 1 \text{ ms} = 10^{-3} \cdot 1 \text{ secondo} = 10^{-3} \text{ s}$$

$$1 \text{ gigametro} = 1 \text{ Gm} = 10^{9} \cdot 1 \text{ metro} = 10^{9} \text{ m}$$

Per passare da un'unità di misura a un suo multiplo o sottomultiplo si inverte la definizione:

$$1 \text{ hg} = 10^2 \text{ g} = 100 \text{ g} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ g} = \frac{1 \text{ hg}}{100} = 10^{-2} \text{ hg}$$

$$1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m} \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ m} = \frac{1 \text{ pm}}{10^{-12}} = 10^{12} \text{ pm}$$

Si esprima la lunghezza 7 Gm (gigametri) in pm (picometri).
In esercizi di questo tipo bisogna lavorare con le potenze di 10; in particolare, una volta note le definizioni dei prefissi per le unità di misura, si devono applicare le proprietà:

$$10^a \cdot 10^b = 10^{a+b} \quad \text{oppure} \quad 10^a / 10^b = 10^{a-b}$$

Conviene sempre passare per l'unità di misura senza prefisso (il metro nell'esempio):

$$7 \text{ Gm} = 7 \cdot (10^9 \text{ m}) = 7 \cdot 10^9 \cdot (\mathbf{1\ m}) = 7 \cdot 10^9 \cdot (10^{12} \text{ pm}) =$$
$$= 7 \cdot (10^9 \cdot 10^{12}) \text{ pm} = 7 \cdot 10^{9+12} \text{ pm} = 7 \cdot 10^{21} \text{ pm}$$

1.1.3 | Notazione scientifica o esponenziale

Ogni numero razionale può essere scritto nella forma $a \cdot 10^b$, dove a è un numero decimale con una sola cifra diversa da zero prima della virgola, mentre b è un numero intero.

$0{,}0025 = 2{,}5 \cdot 10^{-3}$; $\quad -562{,}5 = -5{,}625 \cdot 10^2$; $\quad -0{,}070 = -7{,}0 \cdot 10^{-2}$

Nel trasformare –0,070 in notazione esponenziale non si può tralasciare lo zero dopo il 7.
In fisica, infatti, gli zeri a destra dell'ultima cifra diversa da zero dopo la virgola contengono un'informazione non trascurabile: per esempio, qui, «7 centesimi e 0 millesimi» anziché «7 centesimi». Trascurando questo zero nel passaggio alla notazione esponenziale, l'informazione rispetto al numero di partenza sarebbe incompleta (si veda più avanti il § 1.4.2).

1.1.4 | Ordine di grandezza

L'ordine di grandezza (ODG) di un numero indica con quale potenza di 10 lo si può sostituire in calcoli approssimati. Dato un numero espresso nella notazione esponenziale $a \cdot 10^b$, il suo ODG è:

$$\text{pari all'esponente } b \text{ se } |a| < 5 \quad \text{oppure} \quad \text{pari a } b+1 \text{ se } |a| \geq 5$$

$\text{ODG}(0{,}0025) = -3$; $\quad \text{ODG}(-562{,}5) = 2 + 1 = 3$; $\quad \text{ODG}(-0{,}070) = -2 + 1 = -1$

 © Alpha Test

1.2 | Dimensioni di una grandezza fisica

Per ciascuna delle grandezze fondamentali viste al § 1.1 si introduce un'etichetta di riconoscimento che, racchiusa fra parentesi quadre, indica la grandezza stessa o, più correttamente, la sua *dimensione*. Nella tabella seguente vengono riportate le dimensioni delle grandezze fondamentali.

Grandezza	Dimensione
lunghezza	[L]
massa	[M]
tempo	[T]
intensità di corrente elettrica	[i]
temperatura	[K]
intensità luminosa	[I]
quantità di materia	[m]

Le dimensioni di una grandezza derivata si ricavano dalle dimensioni delle grandezze fondamentali, secondo la stessa relazione che lega la grandezza derivata alle grandezze fondamentali.

Le dimensioni della velocità media, definita come $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, sono $\frac{[L]}{[T]}$.

Se due grandezze fisiche hanno le stesse dimensioni, si dicono **omogenee**.
Alcune grandezze fisiche (tipicamente quelle definite come rapporto fra due grandezze omogenee) sono prive di dimensioni: si tratta di grandezze fisiche **adimensionali**.

La lunghezza di un tavolo e l'altezza di un muro sono grandezze omogenee e hanno entrambe dimensione [L].

Gli **angoli**, che nel SI e nel CGS si misurano in radianti (simbolo: rad), sono grandezze scalari adimensionali. Si noti che, quando non è accompagnata dall'indicazione dei radianti, la dicitura «π» non rappresenta l'angolo piatto, bensì il numero puro che vale circa 3,14.
Dunque, per esempio: 2π rad è l'angolo giro; 2π è un numero puro che vale circa 6,28.

Quali sono le dimensioni di $\cos\vartheta$?
Il coseno di un angolo (così come il seno e la tangente) sono funzioni trigonometriche definite come rapporto tra due segmenti, pertanto sono adimensionali.

1.2.1 | Regole per l'analisi dimensionale

Le dimensioni vengono trattate proprio come le quantità algebriche nel calcolo letterale. Questo implica alcune regole pratiche:

1. i numeri puri, gli angoli e tutte le grandezze adimensionali in genere non hanno dimensioni; nell'analisi dimensionale si possono sostituire con un 1;
2. moltiplicare o dividere una grandezza fisica per un numero puro non varia le dimensioni del risultato;
3. le grandezze fisiche possono essere sommate o sottratte solo se hanno le stesse dimensioni (ossia se sono omogenee);
4. i due membri di un'equazione o di un'uguaglianza fisica devono avere le stesse dimensioni.

Se p è il perimetro di una stanza (con dimensioni $[L]$), il doppio del perimetro ha ancora dimensioni $[L]$. In formule:

$$[2p] = [2] \cdot [p] = 1 \cdot [L] = [L]$$

Questo perché il numero puro 2 è adimensionale.

Le operazioni "1 m + 1 kg" e "22 m/s – 10 s" non hanno senso in fisica.

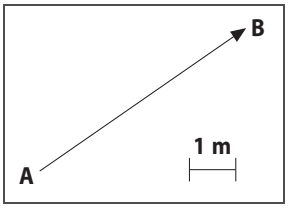
1.3 | Grandezze vettoriali

Queste grandezze sono individuate, oltre che da un numero (*modulo* o *intensità*) che ne esprime la misura rispetto a un'unità prefissata, anche da una *direzione* e da un *verso*.

Si supponga di dover descrivere lo spostamento di una formica a partire dalla sua tana. È chiaro che specificare la lunghezza di questo spostamento, per esempio 3 cm, non è sufficiente: questo basta soltanto a stabilire che la formica, dopo essersi spostata, si trova in qualche punto di una circonferenza di raggio 3 cm centrata nella tana! **Lo spostamento non è una grandezza scalare, ma vettoriale**. Per stabilire la posizione finale della formica è necessario conoscere *anche* la direzione lungo la quale si è mossa e, lungo questa direzione, il verso: per esempio sapere che, a partire dalla sua tana, la formica si è spostata di 3 cm, *in direzione verticale e verso nord*, consente di capire dove è arrivata.

I vettori si rappresentano simbolicamente con delle frecce.

Nella figura è rappresentato un vettore.



- A è il punto di "partenza" o **punto di applicazione**.
- Il **modulo** o **intensità** del vettore è pari alla lunghezza della freccia (rapportata alla relativa unità di misura).
- La **direzione** del vettore è la retta a cui appartiene la freccia.
- Il **verso** del vettore è quello indicato dalla freccia (per ogni direzione si possono avere due versi).

Esistono diverse notazioni per indicare un vettore. Le più utilizzate sono il grassetto **v** o la barra sopra la lettera $\bar{v}$. In questo testo viene adottato l'uso del grassetto.

Il modulo di un generico vettore **v** è indicato con il simbolo $|\mathbf{v}|$ oppure con il corsivo *v*.

Due vettori si dicono:
- **paralleli** quando giacciono su direzioni (rette) coincidenti o parallele;
- **concordi** quando sono paralleli e hanno lo stesso verso;
- **antiparalleli** o **discordi** quando sono paralleli ma hanno verso opposto;
- **ortogonali** o **perpendicolari** quando le loro direzioni formano un angolo di 90° tra loro.

1.3.1 | Multipli di un vettore

Un certo vettore **v** può essere moltiplicato per uno scalare *s* (cioè per un numero), ottenendo come risultato un **vettore multiplo** di **v**, che ha *la stessa direzione* ma *modulo diverso*. Il verso del multiplo è concorde o discorde con quello del vettore **v** a seconda che lo scalare *s* sia positivo o negativo; il modulo del vettore prodotto è pari al prodotto dello scalare *s* per il modulo del vettore **v**.
Moltiplicando un vettore per 2, si ha cioè:

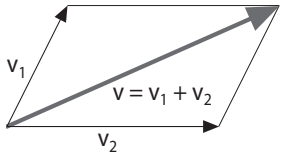
$$|\mathbf{2v}| = |2 \cdot \mathbf{v}| = 2 \cdot |\mathbf{v}| = 2v$$

Si definisce **opposto** di un vettore **v** il vettore $-\mathbf{v}$, che ha lo stesso modulo ma verso opposto.

 © Alpha Test

1.3.2 | Somma e differenza fra vettori

I vettori si sommano con la **regola del parallelogramma**: la **somma** di due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il vettore $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$, diretto lungo la diagonale del parallelogramma avente per lati i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Il vettore $\mathbf{v}$ ha per modulo la lunghezza della diagonale.



Vale la relazione $0 \leq |\mathbf{v}| \leq |\mathbf{v}_1| + |\mathbf{v}_2|$, ma in generale si ha:

$$|\mathbf{v}| \neq |\mathbf{v}_1| + |\mathbf{v}_2|$$

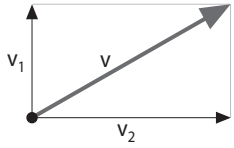
Il vettore somma prende il nome di **risultante**. Il modulo del vettore risultante si ricava in generale applicando la seguente relazione trigonometrica: detto α l'angolo tra i due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, la loro somma $\mathbf{v}$ ha modulo:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 + 2 \cdot |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \cos\alpha}$$

Di seguito si riportano tre esempi in cui tale calcolo può essere effettuato più rapidamente, ricordando che $\cos(0°) = 1$, $\cos(90°) = 0$ e $\cos(180°) = -1$.

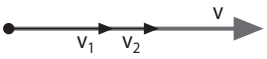
$\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono ortogonali tra loro ($\alpha = 90°$).
Direzione e verso del vettore risultante $\mathbf{v}$ si costruiscono con la regola del parallelogramma; il modulo del vettore somma si ricava applicando il teorema di Pitagora:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2}$$



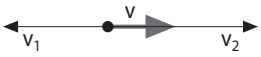
$\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono paralleli e concordi ($\alpha = 0°$).
Il vettore risultante $\mathbf{v}$ ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$; il modulo è dato da:

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_1| + |\mathbf{v}_2|$$



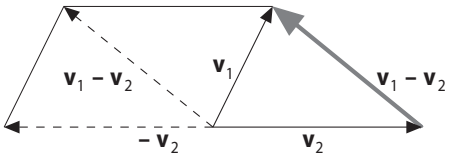
$\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono antiparalleli ($\alpha = 180°$).
Il vettore risultante $\mathbf{v}$ ha la stessa direzione di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e lo stesso verso del vettore di modulo maggiore; il modulo è invece dato da:

$$|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_2| - |\mathbf{v}_1| \text{ se } |\mathbf{v}_2| > |\mathbf{v}_1|; \quad |\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_1| - |\mathbf{v}_2| \text{ altrimenti}$$



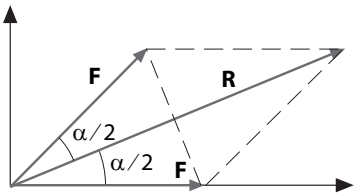
La **differenza** tra due vettori si ottiene sommando al primo vettore l'opposto del secondo:

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2)$$



Si supponga di voler calcolare il modulo della risultante R di due forze che hanno lo stesso modulo F, formano tra loro un angolo $\alpha < 90°$ e sono applicate allo stesso punto: in questo caso si può usare la regola grafica del parallelogramma, facendo attenzione alle caratteristiche geometriche del problema.

Senza perdere in generalità, si può rappresentare una delle due forze lungo la direzione orizzontale in un riferimento cartesiano, e l'altra lungo la direzione che forma con essa un angolo $\alpha < 90°$. La risultante delle due forze, ovvero la diagonale del parallelogramma di lati uguali e pari a F, è quindi un vettore lungo quanto il doppio dell'altezza del triangolo isoscele di lati F. Tale altezza vale $h = F\cos(\alpha/2)$, dunque $R = 2F\cos(\alpha/2)$.



1.3.3 | Scomposizione di un vettore

Dato un riferimento cartesiano in cui giace un vettore **v** qualsiasi, le **componenti del vettore sono le sue proiezioni ortogonali sugli assi**; in altre parole, sono i due vettori $\mathbf{v}_x$ e $\mathbf{v}_y$ paralleli rispettivamente agli assi x e y, tali che la loro somma dà il vettore **v**.

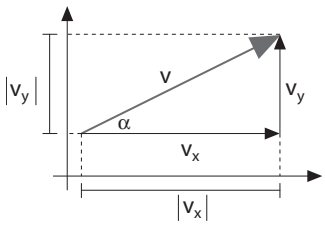
Le definizioni delle funzioni trigonometriche *seno* e *coseno* consentono di scomporre un vettore lungo due assi ortogonali orientati.

Nella figura è riportata la scomposizione di **v**, un generico vettore. $\mathbf{v}_x$ e $\mathbf{v}_y$ sono le componenti del vettore lungo gli assi cartesiani e si ha $\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y$.

Se, per esempio, $|\mathbf{v}| = 8$ cm e $\alpha = 30°$, si ha:

$$|\mathbf{v}_x| = 8\text{ cm} \cdot \cos(30°) = 8\text{ cm} \cdot (\sqrt{3}/2) = 4\sqrt{3}\text{ cm}$$

$$|\mathbf{v}_y| = 8\text{ cm} \cdot \text{sen}(30°) = 8\text{ cm} \cdot (1/2) = 4\text{ cm}$$



È sufficiente qualche nozione di geometria piana per riconoscere, nell'esempio precedente in cui $\alpha = 30°$, metà di un triangolo equilatero di lato **v** e altezza $\mathbf{v}_x$. Dunque, conoscendo il lato, si può concludere senza utilizzare la trigonometria che le componenti cercate sono:

$$|\mathbf{v}_x| = \text{altezza} = \mathbf{v} \cdot (\sqrt{3}/2); \quad |\mathbf{v}_y| = \text{base} = \mathbf{v}/2$$

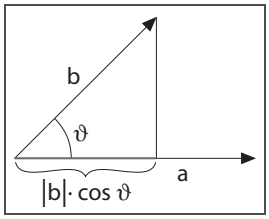
1.3.4 | Prodotti tra vettori

Diversamente dai numeri, i vettori possono essere moltiplicati fra loro in due modi diversi: mediante il prodotto *scalare* e il prodotto *vettoriale*.

Il **prodotto scalare** tra due vettori **a** e **b** è uno scalare (*cioè un numero puro!*) così definito:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\vartheta, \quad \text{dove } \vartheta \text{ è l'angolo tra } \mathbf{a} \text{ e } \mathbf{b}$$

Il prodotto scalare tra due vettori è dunque pari a $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}_p|$, dove $\mathbf{b}_p$ è la componente di **b** parallela ad **a**, che vale appunto $|\mathbf{b}| \cdot \cos\vartheta$.



Si calcoli il prodotto scalare di due vettori a e b, sapendo che $a = 3$, $b = 1$, e che formano con l'asse x angoli rispettivamente pari a $\alpha = 60°$ e $\beta = 30°$.

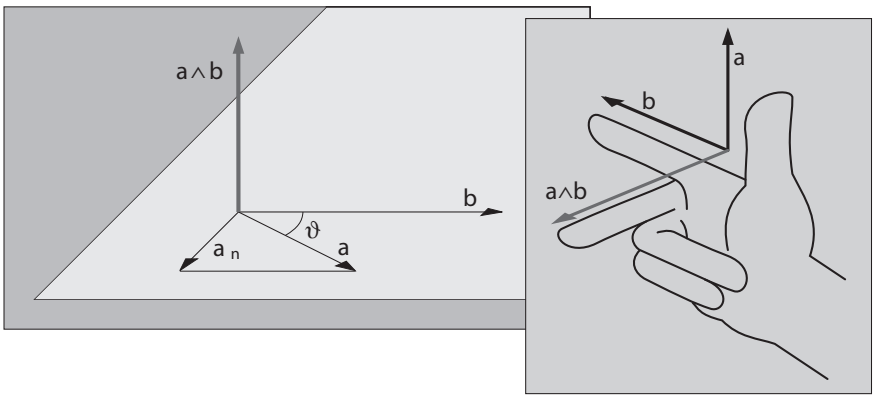
L'angolo ϑ formato dai due vettori **a** e **b** descritti nel testo è pari a $\alpha - \beta = 30°$. Si procede quindi a calcolare il loro prodotto scalare secondo la definizione:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\vartheta = 3 \cdot 1 \cdot \cos(30°) = 3\sqrt{3}/2$$

 © Alpha Test

Il **prodotto vettoriale** $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ è un vettore così definito:

- **Intensità**: $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \text{sen}\,\vartheta = |\mathbf{a}_n| \cdot |\mathbf{b}|$ dove $\mathbf{a}_n$ è la componente di **a** perpendicolare a **b**
- **Direzione**: perpendicolare al piano individuato da **a** e da **b**
- **Verso**: determinato dalla *regola della mano destra*, illustrata nella figura sottostante: se il pollice si dispone come **a** e l'indice come **b** allora il medio indica la direzione e il verso del prodotto vettoriale tra i due.



Si calcoli il prodotto vettoriale dei vettori a e b descritti nell'esercizio precedente.

Prima di calcolare il prodotto vettoriale, si osserva che, poiché il risultato è un vettore (e *non un numero* come nel caso del prodotto scalare), il problema richiede tre informazioni: il risultato $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ è descritto completamente solo conoscendone modulo, direzione e verso.
Si calcola il *modulo* secondo la definizione:

$$|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \text{sen}\,\vartheta = 3 \cdot 1 \cdot \text{sen}(30°) = 3 \cdot 1/2 = 3/2$$

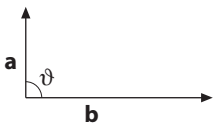
La direzione è perpendicolare al piano in cui giacciono i due vettori (in questo caso al piano del foglio) e il verso è *entrante* nel foglio (regola della mano destra).

Ricordando che $\text{sen}(90°) = 1$, $\text{sen}(0°) = \text{sen}(180°) = 0$, $\cos(90°) = 0$, $\cos(0°) = 1$ e $\cos(180°) = -1$, si ricavano i valori del prodotto scalare e vettoriale in tre casi particolari:

Se a e b sono ortogonali ($\vartheta = 90°$)**:**

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(90°) = 0$
- $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \text{sen}(90°) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$

Dunque il prodotto scalare è nullo, mentre il modulo del prodotto vettoriale è massimo.



Se a e b sono paralleli e concordi ($\vartheta = 0°$)**:**

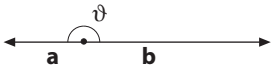
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(0°) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$
- $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \text{sen}(0°) = 0$

Dunque il prodotto scalare è massimo, mentre il prodotto vettoriale è nullo.

Se a e b sono antiparalleli ($\vartheta = 180°$)**:**

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(180°) = -|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$
- $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \text{sen}(180°) = 0$

Dunque il prodotto scalare è minimo, mentre il prodotto vettoriale è ancora nullo.



1.4 | Errori di misura

Non si può misurare una grandezza fisica con una precisione assoluta: ogni misura è affetta da errori, che possono essere suddivisi in due categorie.

Errori sistematici: derivano da difetti strumentali o dall'applicazione di leggi errate; sono errori sempre nello stesso verso, cioè o sempre per eccesso o sempre per difetto rispetto alla misura *vera*.
Errori accidentali: sono inevitabilmente legati a ogni procedura di misura; sono errori casuali nel senso che possono avvenire sia in eccesso sia in difetto rispetto alla misura *vera*.

Lasciare inavvertitamente un righello di plastica vicino a una fonte di calore può causarne una dilatazione e dunque una *staratura*. In particolare, le misure effettuate con il righello così starato andranno incontro a un errore sistematico per difetto, cioè saranno tutte *sottostimate*, nel senso che gli oggetti appariranno più corti di quello che sono.

1.4.1 | Errore assoluto, relativo e percentuale

Data una grandezza x, si supponga di misurarla n volte: siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ gli n valori ottenuti (che potrebbero anche essere tutti diversi a causa degli errori di misura). Indicando con x_{max} e x_{min} il massimo e il minimo dell'insieme dei valori e con M la loro media aritmetica, si hanno le seguenti definizioni.

L'**errore assoluto** vale $\varepsilon = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{2}$ (semidifferenza fra minimo e massimo).

L'**errore relativo** vale $\varepsilon_r = \varepsilon / M$ (rappresenta una *normalizzazione* dell'errore assoluto).

L'**errore percentuale** vale $\varepsilon_{\%} = (100 \cdot \varepsilon_r)\%$.

L'errore relativo e l'errore percentuale di una misura sono indici della sua accuratezza: minore è il loro valore, maggiore è l'accuratezza. Ogni misura deve essere accompagnata dall'errore e dall'unità di misura. La misura e l'errore si esprimono nelle stesse unità.

Un maestro chiede ad alcuni alunni della sua classe di misurare con un righello il lato più lungo di un foglio A4, facendo molta attenzione. Il risultato delle misure trovate da dieci studenti, espresse in cm, è:

29,8; 29,8; 29,6; 29,7; 29,7; 29,9; 29,8; 30,0; 29,7; 29,8

Calcolare media ed errore assoluto, relativo e percentuale. Il righello è starato?

Secondo le definizioni viste sopra si calcolano le grandezze richieste:

$$M = \frac{29{,}8 + 29{,}8 + 29{,}6 + \dots + 29{,}8}{10} = 29{,}78$$

$$\varepsilon = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = \frac{30{,}0 - 29{,}6}{2} = 0{,}2$$

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{M} = 6{,}72 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_{\%} = 100 \cdot \varepsilon_r = 0{,}67\%$$

Il risultato della misura effettuata dagli studenti è dunque:

$$x = (29{,}78 \pm 0{,}2)\ \text{cm}$$

Questo significa che secondo gli studenti il foglio A4 è lungo minimo 29,58, massimo 29,98 cm. Si preferisce solitamente indicare il risultato approssimandolo alla prima cifra interessata dall'errore assoluto (in questo caso la prima decimale):

$$x = (29{,}8 \pm 0{,}2)\ \text{cm}$$

Il valore vero della lunghezza di un foglio A4 (29,7 cm) è contenuto nell'intervallo indicato dalla misura degli studenti, perciò non si può concludere che lo strumento sia starato.

1.4.2 | Cifre significative

Quando un numero rappresenta la misura di una certa quantità, le cifre significative sono quelle che apportano effettivamente delle informazioni sulla misura.

- L'informazione contenuta nel numero $a = 0{,}024$ è «2 centesimi e 4 millesimi».
- L'informazione contenuta nel numero $b = 0{,}0240$ è «2 centesimi, 4 millesimi e 0 decimi di millesimo».

Dunque, i numeri a e b non hanno lo stesso significato: b contiene più informazioni.

Regole per la determinazione delle cifre significative

- Le cifre diverse da zero sono significative;
- Gli zeri compresi fra due cifre diverse da zero sono significativi;
- Per un numero decimale con lo zero davanti alla virgola, esso e gli eventuali zeri che precedono le cifre diverse da zero *non sono* cifre significative.

- Le cifre significative di $a = 0{,}024$ sono 2 e 4;
- le cifre significative di $b = 0{,}0240$ sono 2, 4 e lo 0 dopo il 4;
- tutte le cifre di $c = 1{,}205$ sono significative.

1.4.3 | Propagazione degli errori

Se, anziché l'errore associato a una grandezza *misurata*, si vuole conoscere l'errore associato a una grandezza *calcolata* a partire dalle misure effettuate (ciascuna delle quali affetta da errore), si tratta di valutare come si propagano gli errori quando si eseguono operazioni tra più misure.

Per misurare l'area A di un tavolo di lunghezza a e larghezza b si utilizza la semplice relazione $A = a \cdot b$. Dato che le misure di a e b sono di per sé affette da errore, la misura *indiretta* dell'area A sarà affetta da un errore che è la *propagazione* di quello su a e b.

Regole base per la propagazione dell'errore

- L'errore **assoluto** su una **somma** o una **differenza** di più misure è uguale alla somma degli errori **assoluti** delle singole misure.
- L'errore **percentuale** su un **prodotto** o su un **quoziente** di più misure è uguale alla somma degli errori **percentuali** delle singole misure.

Sia dato un quadrato di cui si conosce la misura del lato, pari a $L = (10 \pm 2)$ cm. Calcolare errore assoluto e percentuale su perimetro e superficie del quadrato.

Il perimetro del quadrato vale $P = 4L = 40$ cm. Si tratta della *somma* di quattro grandezze (in questo caso coincidenti: il lato) di cui è noto l'errore assoluto $\varepsilon = 2$ cm. Si può pertanto scrivere che l'errore assoluto su P vale:

$$\varepsilon_P = \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon = 8 \text{ cm}$$

Così l'errore relativo sul perimetro, per definizione, vale:

$$\varepsilon_{rP} = \frac{\varepsilon_P}{P} = \frac{8 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} = 0{,}2 \quad \text{(è un numero puro)}$$

L'errore relativo sul lato si ricava dal valore del lato e dal suo errore assoluto secondo la definizione:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{L} = \frac{2 \text{ cm}}{10 \text{ cm}} = 0{,}2 \quad \text{(è un numero puro)}$$

L'area del quadrato è data dal *prodotto* del lato per se stesso: $A = L^2 = 100 \text{ cm}^2$, pertanto si sommano gli errori relativi sui lati per trovare l'errore relativo sull'area:

$$\varepsilon_{rA} = \varepsilon_r + \varepsilon_r = 0{,}4 \quad \text{(è un numero puro)}$$

A questo punto, per trovare l'errore assoluto sull'area, si inverte la definizione di ε_{rA}:

$$\varepsilon_{rA} = \frac{\varepsilon_A}{A} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_A = \varepsilon_{rA} \cdot A = 0{,}4 \cdot 100 \text{ cm}^2 = 40 \text{ cm}^2$$

Quesiti svolti

1 **Siano *a*, *b* e *c* le lunghezze degli spigoli di un parallelepipedo regolare. Data la relazione $abc + X = Y$, determinare quale tra le seguenti sono, rispettivamente, le dimensioni delle grandezze *X* e *Y*.**

A *X* è una lunghezza e *Y* un volume
B Entrambe le grandezze sono superfici
C Entrambe le grandezze sono lunghezze
D Entrambe le grandezze sono volumi
E Nessuna delle precedenti

Anzitutto, secondo una semplice nozione di geometria elementare, la quantità abc è il volume del parallelepipedo. Dato che in fisica si possono sommare solo grandezze con le stesse dimensioni, *X* deve essere un volume. Naturalmente, la somma di due volumi è un volume; infine, dato che i due membri di un'eguaglianza tra grandezze fisiche devono avere le stesse dimensioni, si conclude che anche la grandezza *Y* è un volume. La risposta esatta è la **D**.

2 **Sottraendo tra loro due grandezze espresse in metri si ottiene...**

A una lunghezza espressa in metri
B una lunghezza espressa in metri quadrati
C una superficie espressa in metri quadrati
D un numero puro
E una lunghezza espressa in metri se le due lunghezze di partenza hanno valori diversi, altrimenti 0

L'operazione descritta è: $d = L_1 - L_2$. La differenza tra due grandezze omogenee (quali due lunghezze) è permessa e dà come risultato ancora una grandezza omogenea (qui, dunque, una lunghezza). Anche se $L_1 = L_2$ e quindi $d = 0$, la differenza *d* mantiene le dimensioni di una lunghezza. La risposta corretta è la **A**.

3 **Qual è il risultato dell'operazione tra grandezze fisiche: M = 10 g + 20 cg + 5 kg?**

A 35 g
B L'operazione non ha senso
C 5,30 kg
D 5010,2 g
E 35 kg

La risposta corretta è la **D**. Prima di procedere al calcolo numerico è necessario eseguire due equivalenze; supponendo di eseguire il calcolo in grammi:

$$20 \text{ cg} = 0{,}2 \text{ g}\,; \quad 5 \text{ kg} = 5000 \text{ g} \quad \Rightarrow \quad M = 10 \text{ g} + 0{,}2 \text{ g} + 5000 \text{ g} = 5010{,}02 \text{ g}$$

Più in generale, prima di scegliere la risposta tra le alternative di un quesito, è bene soffermarsi sulle unità di misura oltre che sul risultato numerico! Inoltre, prima di sostituire i dati numerici nella formula risolutiva di un problema di fisica, si deve verificare la consistenza delle loro unità di misura. Se non è altrimenti richiesto, è sempre buona norma riportare tutte le unità di misura a quelle del Sistema internazionale.

© Alpha Test

4 **Quale dei seguenti elenchi di grandezze fisiche comprende solo grandezze fondamentali del Sistema internazionale delle unità di misura (SI)?**

- **A** Lunghezza; massa; tempo; forza
- **B** Pressione; quantità di moto; energia; lavoro
- **C** Corrente elettrica; massa; temperatura; tempo
- **D** Carica elettrica; massa; calore; tempo
- **E** Costante dielettrica; costante gravitazionale; carica dell'elettrone; velocità della luce nel vuoto

Nella risposta **A** la forza non è una grandezza fondamentale del SI, nella **D** non lo sono la carica elettrica e il calore, nella **B** e nella **E** non lo è nessuna delle grandezze indicate. La risposta esatta è dunque la **C**.

5 ***Micro* è un prefisso che indica un sottomultiplo dell'unità pari a:**

- **A** 1 centesimo
- **B** 1 decimo
- **C** 1 millesimo
- **D** 1 milionesimo
- **E** 1 miliardesimo

Il prefisso micro corrisponde a 10^{-6}. D'altra parte $10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1.000.000}$ (risposta **D**)

6 **Se un piede equivale a 12 pollici, a quanti pollici quadrati equivalgono 3 piedi quadrati?**

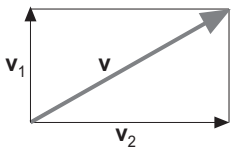
- **A** 24
- **B** 72
- **C** 144
- **D** 432
- **E** 512

Dal momento che 1 piede = 12 pollici, elevando al quadrato i due membri della precedente uguaglianza si ottiene $(1 \text{ piede})^2 = (12 \text{ pollici})^2$ ossia $1 \text{ piede}^2 = 144 \text{ pollici}^2$. Si ricava quindi che $3 \text{ piedi}^2 = 3 \cdot 144 \text{ pollici}^2 = 432 \text{ pollici}^2$ (risposta **D**).

7 **Due vettori, entrambi non nulli, sono perpendicolari fra loro. La somma dei due vettori è:**

- **A** nulla
- **B** un vettore appartenente al piano individuato dai due vettori
- **C** un vettore perpendicolare al piano individuato dai due vettori
- **D** un vettore che ha modulo pari alla somma dei moduli degli addendi
- **E** è impossibile fare la somma di due vettori perpendicolari tra loro

Per trovare la somma di due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ si applica la regola del parallelogramma: la loro somma $\mathbf{v}$ è il vettore disposto lungo la diagonale del parallelogramma (si veda la figura a lato).



Il vettore $\mathbf{v}$ appartiene quindi al piano del parallelogramma, piano individuato dai due vettori. Se i due vettori sono perpendicolari, il parallelogramma diventa un rettangolo e la somma dei due vettori è disposta lungo la diagonale del rettangolo. La risposta esatta è la **B**.

8 **Il modulo del vettore risultante dalla somma di due vettori, a e b, è uguale alla differenza tra il modulo del vettore a e il modulo del vettore b. È possibile affermare che:**

A i vettori **a** e **b** hanno la stessa direzione e lo stesso verso
B i vettori **a** e **b** hanno la stessa direzione e verso opposto
C i vettori **a** e **b** possono avere una direzione e un verso qualsiasi
D le direzioni dei vettori **a** e **b** formano un angolo di 60°
E i vettori **a** e **b** hanno modulo uguale e verso opposto

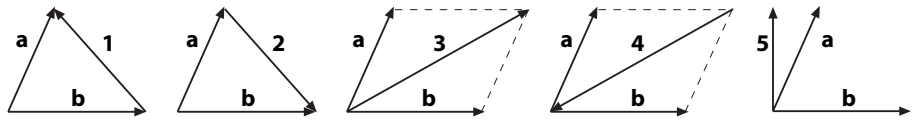
La risposta corretta è la B.

Il modulo della risultante di due vettori è dato dalla somma algebrica dei moduli dei due vettori solo quando questi sono equidirezionali (paralleli), e ciò consente di scartare le risposte C e D.

La risposta A può essere esclusa per il fatto che se, oltre ad avere la stessa direzione, i due vettori hanno anche lo stesso verso, il modulo della risultante si ottiene **sommando** i loro moduli.

La risposta E infine non è corretta per il fatto che rappresenta una condizione **sufficiente** ma **non necessaria** affinché l'affermazione del testo dell'esercizio sia vera. In altre parole è vera l'implicazione seguente: (i vettori **a** e **b** hanno modulo uguale e verso opposto) $\Rightarrow$ (il modulo del vettore risultante dalla somma dei due vettori **a** e **b** è uguale alla differenza tra il modulo del vettore **a** e il modulo del vettore **b)**; non è però vera l'implicazione inversa. Dall'affermazione contenuta nel testo del quesito non si può, quindi, concludere che i due vettori **a** e **b** hanno lo stesso modulo.

9 **Quale vettore tra quelli indicati nei seguenti disegni con i numeri rispettivamente 1, 2, 3, 4, 5 rappresenta il vettore differenza a – b?**



A **1**
B **2**
C **3**
D **4**
E **5**

Secondo la regola del parallelogramma, la somma vettoriale (o *risultante*) di due vettori **a** e **b** è la diagonale del parallelogramma che ha per lati **a** e **b**. La risultante **a** + **b** è rappresentata nel diagramma 3. Utilizzando sempre la regola del parallelogramma, si definisce differenza tra **a** e **b**:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

Dunque il calcolo della differenza di due vettori si riduce al calcolo della somma di un vettore con l'opposto dell'altro. Graficamente, il vettore opposto è lo stesso vettore cambiato di verso. Si conclude che lo schema corretto per la differenza **a** – **b** è l'1: la risposta esatta è la A.

10 **Il "prodotto" di due vettori non nulli:**

A è sempre uno scalare
B può essere sia un vettore sia uno scalare, a seconda del tipo di prodotto
C è un vettore sempre nullo: solo gli scalari si possono moltiplicare tra di loro
D ha come risultato un vettore che giace nello stesso piano dei due vettori
E è sempre un vettore

Sono definiti due tipi di prodotto tra vettori: il *prodotto scalare*, che fornisce come risultato uno scalare, e il *prodotto vettoriale*, che fornisce invece come risultato un vettore. La risposta esatta è dunque la B.

 © Alpha Test

11 **Data la misura della lunghezza di un circuito in chilometri, si riconoscano tra le seguenti le dimensioni dell'errore assoluto e dell'errore relativo della misura.**

A [L]; [L]

B [L]; $[L]^2$

C Adimensionale; [L]

D [L] ; adimensionale

E Sono entrambe grandezze adimensionali

Per ricavare le dimensioni dell'errore assoluto di una misura si utilizza la definizione.

Supponendo che la misura del circuito sia per esempio la media di una serie di misure, e ricordando che dividere per un numero non cambia le dimensioni:

$$\varepsilon = \frac{x_{max} - x_{min}}{2} \quad \Rightarrow \quad [\varepsilon] = [x_{max} - x_{min}] = [x] = [L]$$

L'errore assoluto ha sempre le dimensioni della misura a cui è associato.

L'errore relativo è definito come $\varepsilon_r = \varepsilon / X$, dove X è la misura. Essendo il rapporto di due grandezze con le stesse dimensioni, ε_r è una grandezza adimensionale. In questo caso:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{X} \quad \Rightarrow \quad [\varepsilon_r] = \frac{[L]}{[L]} = 1$$

La risposta corretta è pertanto la **D**.

12 **La misura della massa di un corpo è (20,0 ± 0,5) mg. Quanto vale l'errore percentuale?**

A 0,5%

B 2,5%

C 5,0%

D 25%

E 50%

Quando la misura di una grandezza è indicata nella forma $(M \pm \varepsilon)$, M rappresenta il valore medio di più misure, mentre ε indica l'errore assoluto associato a M. Si definiscono errore relativo ε_r ed errore percentuale $\varepsilon_{\%}$ le due quantità:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{M} \qquad \varepsilon_{\%} = \frac{\varepsilon}{M} \cdot 100\%$$

Sostituendo i valori, si ottiene: $\varepsilon_{\%} = \dfrac{0{,}5 \text{ mg}}{20 \text{ mg}} \cdot 100 = 2{,}5\ \%$.

La risposta esatta è quindi la **B**.

13 **Misurando la larghezza *l* e l'altezza *h* di un tavolo si trovano i seguenti valori:**

$$l = (180 \pm 0{,}2) \text{ cm} \quad \text{e} \quad h = (80 \pm 0{,}1) \text{ cm}$$

Dire quale delle due misure è più precisa.

A l

B h

C Hanno la stessa precisione

D Per rispondere occorre conoscere gli errori assoluti

E Per rispondere occorre conoscere da che tipo di errore sono affette le misure

La grandezza che esprime la precisione di una misura è il suo errore relativo (o anche l'errore percentuale). Per le due misure in esame si ha:

$$\varepsilon_{r,l} = \frac{0,2}{180} = 0,0011 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\%} = 0,11\% ; \qquad \varepsilon_{r,h} = \frac{0,1}{80} = 0,0013 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{\%} = 0,13\%$$

Essendo $\varepsilon_{r,l} < \varepsilon_{r,h}$ si conclude che la misura della larghezza del tavolo è più precisa della misura dell'altezza (risposta **A**).

Si noti che non sempre errore assoluto più piccolo significa misura più precisa!

© Alpha Test

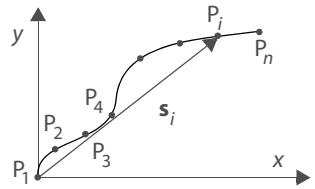
2| Cinematica

La *cinematica* studia e descrive il moto dei corpi senza interessarsi delle cause che lo producono. L'insieme di cinematica, *statica* (che studia l'equilibrio dei corpi) e *dinamica* (che analizza le cause del moto) prende il nome di *meccanica*.

2.1 | Punto materiale, traiettoria, sistemi di riferimento

✔ Nel descrivere il moto di un corpo (per esempio un'automobile che percorre un circuito) si ricorre spesso a una comoda approssimazione, considerando l'oggetto come un punto in cui è concentrata tutta la massa del corpo: si trascura cioè la sua estensione spaziale, preoccupandosi soltanto della posizione. Tale punto prende il nome di **punto materiale**.

✔ La **traiettoria** di un punto materiale è la linea che unisce tutte le posizioni (P_1, P_2, ..., P_n) occupate dal punto al trascorrere del tempo, per esempio in un riferimento cartesiano.
Il vettore che congiunge l'origine degli assi e ciascun punto P_i della traiettoria è detto **vettore posizione** e si indica con $\mathbf{s}_i$. La direzione e il verso di $\mathbf{s}_i$ sono indicati in figura.



Dire che un oggetto è in quiete o in moto ha senso solo se si è precedentemente fissato un **sistema di riferimento**, rispetto al quale è possibile esprimere le posizioni occupate dal corpo nel tempo e tracciarne la relativa traiettoria. Il sistema di riferimento che si sceglie è normalmente *solidale* con la Terra, cioè in quiete rispetto a essa. Il moto del corpo è di conseguenza un *moto relativo* perché riferito a quel sistema. A seconda che il movimento avvenga lungo una retta, su un piano o nello spazio tridimensionale, per rappresentarlo si useranno rispettivamente una retta, un sistema di due assi ortogonali (**piano cartesiano**) o un sistema di tre assi ortogonali (**terna cartesiana**).

2.2 | Grandezze cinematiche

Per fissare le idee, si consideri che le grandezze cinematiche vengano osservate all'inizio e alla fine di intervalli di tempo ben precisi: tali istanti si possono chiamare, indifferentemente (e con ovvio riferimento dei pedici all'inizio e alla fine dell'osservazione), t_1 e t_2, oppure t_i e t_f, oppure ancora t_0 e t. Di conseguenza, le varie grandezze descritte nel seguito saranno indicate con gli stessi pedici dell'istante a cui si riferiscono.

2.2.1 | Spostamento

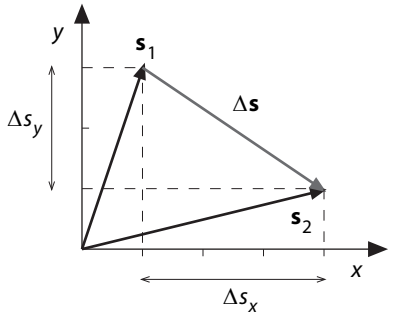
Il *vettore spostamento* unisce la posizione occupata nell'istante iniziale da un punto materiale in moto a quella occupata nell'istante finale. Si definisce quindi come una differenza di vettori posizione e si indica con $\Delta\mathbf{s}$:

$$\Delta\mathbf{s} = \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1$$

L'unità di misura dello spostamento nel SI è il metro, mentre nel CGS è il centimetro.

In generale l'operatore matematico Δ applicato a una grandezza fisica *g* indica la **variazione** di *g* e si calcola sottraendo al valore assunto da *g* nell'istante finale il valore assunto da *g* nell'istante iniziale: $\Delta g = g_2 - g_1$.

Si supponga di dover disegnare il vettore spostamento di un punto materiale che si muove su un piano cartesiano, sapendo che nell'istante iniziale il punto occupa la posizione (1;3) e nell'istante finale raggiunge la posizione (4;1).
Per farlo si rappresentano il vettore posizione iniziale $\mathbf{s}_1$ e quello finale $\mathbf{s}_2$ nel piano cartesiano, secondo la definizione (cioè il vettore che va dall'origine degli assi al punto occupato). Si disegna poi il vettore spostamento $\Delta\mathbf{s} = \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1$ come *differenza tra vettori* (cfr. § 1.3.2).



Se inoltre si vuole calcolare la lunghezza di $\Delta\mathbf{s}$, osservando il diagramma si applica il teorema di Pitagora alle componenti del vettore:

$$|\Delta\mathbf{s}| = \Delta s = \sqrt{(\Delta s_x)^2 + (\Delta s_y)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13}$$

2.2.2 | Velocità

La **velocità media** è un vettore definito come rapporto tra la variazione del vettore posizione (rispetto a una terna cartesiana) e la variazione di tempo:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\mathbf{s}}{\Delta t}$$

L'unità di misura della velocità nel SI è il $\mathrm{m \cdot s^{-1}} = \mathrm{m/s}$ (nel CGS è il $\mathrm{cm/s}$).

Esiste un'altra unità di misura della velocità molto usata: il km/h. Si ricorda che:

$$1\ \mathrm{km} = 1000\ \mathrm{m} = 100.000\ \mathrm{cm} = 10^5\ \mathrm{cm}; \qquad 1\ \mathrm{h} = 60\ \mathrm{min} = 60 \cdot 60\ \mathrm{s} = 3600\ \mathrm{s} = 3{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{s}$$

Per passare da km/h a m/s si moltiplica per $\frac{1000}{3600} = \frac{10}{36} = \frac{1}{3{,}6}$ (ossia si divide per 3,6).

Per passare da m/s a km/h si moltiplica quindi per 3,6.

$$v = 60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{60 \cdot 1000}{3600}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{60}{3{,}6}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 16{,}7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$v = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 10 \cdot 3{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 36\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

 © Alpha Test

Un'automobile percorre il tragitto Milano-Torino a una velocità media di 100 km/h. Se la distanza tra le due città è di circa 140 km, quanto tempo è durato il tragitto?

Secondo la definizione, il modulo della velocità media vale $v = \Delta s/\Delta t$. Tale modulo è appunto un dato del problema, mentre l'altro è il modulo del vettore spostamento $\Delta\mathbf{s}$. Per trovare il tempo impiegato a percorrere il tragitto è sufficiente invertire la relazione $v = \Delta s/\Delta t$:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{140\ \text{km}}{100\ \text{km/h}} = 1{,}4\ \text{h}$$

Infine, trasformando in ore e minuti:

$$\Delta t = 1{,}4\ \text{h} = 1\ \text{h} + 0{,}4\ \text{h} = 1\ \text{h} + (0{,}4 \cdot 60\ \text{min}) = 1\ \text{h} + 24\ \text{min}$$

La velocità media è un vettore!

È parallela al vettore $\Delta\mathbf{s}$ perché la si ricava come rapporto tra il vettore $\Delta\mathbf{s}$ e un numero sempre positivo (Δt), e ha modulo pari al modulo di $\Delta\mathbf{s}$ diviso Δt:

$$v = \Delta s/\Delta t$$

La velocità media non è la media delle velocità! Si veda l'esercizio che segue.

Un camion viaggia a 200 km/h per mezz'ora, poi a 150 km/h per un'ora, infine a 50 km/h per due ore. Qual è la sua velocità media?

Si è tentati di rispondere:

$$v = \frac{200 + 150 + 50}{3}\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 133{,}3\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Ma questo procedimento è errato, poiché non si è utilizzata la definizione di velocità media $v = \Delta s/\Delta t$: per trovarla serve dunque ricavare lo spazio totale percorso e dividerlo per il tempo totale impiegato. Conviene rappresentare i dati del problema in una tabella:

	v (km/h)	t (h)	$\Delta s = v \cdot \Delta t$ (km)
1° tratto	200	0,5	100
2° tratto	150	1	150
3° tratto	50	2	100
Totale	/	3,5 h	350 km

A questo punto è facile calcolare il modulo della velocità media secondo la definizione:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{350\ \text{km}}{3{,}5\ \text{h}} = 100\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Al contrario, sapere che un mezzo ha percorso un certo tragitto con una velocità media di 100 km/h non consente di per sé di conoscere la velocità da esso tenuta nei singoli tratti del tragitto. Per aumentare la quantità di informazioni sullo stato di moto, occorre ridurre l'ampiezza degli intervalli temporali nei quali si effettuano le misure. Il rapporto spazio/tempo viene così calcolato per intervalli di tempo via via più piccoli, al limite prossimi a zero.

Matematicamente, questo si ottiene effettuando un *passaggio al limite* secondo la relazione seguente, che fornisce la definizione di **velocità istantanea**:

$$\mathbf{v}_{\text{ist}} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{s}}{\Delta t} = \mathbf{s}'(t)$$

Il simbolo $\mathbf{s}'(t)$ indica la *derivata* del vettore posizione $\mathbf{s}$ e corrisponde all'operazione matematica di passaggio al limite del rapporto delle differenze. Per questo motivo si dice che la velocità istantanea è data dalla derivata dello spazio rispetto al tempo.

2.2.3 | Accelerazione

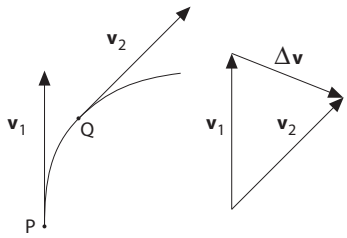
L'**accelerazione media** è un vettore definito come rapporto tra la variazione del vettore velocità (rispetto a una terna cartesiana) e la variazione di tempo:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

L'unità di misura dell'accelerazione nel SI è il $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2} = \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ (nel CGS è il cm/s^2).

L'accelerazione media è un vettore!
Direzione e verso: gli stessi della variazione di velocità $\Delta\mathbf{v}$, poiché Δt è un numero sempre positivo. **Modulo**: pari al rapporto fra il modulo della variazione di velocità $|\Delta\mathbf{v}|$ e il tempo Δt impiegato per tale variazione.

L'accelerazione media è stata definita come variazione del vettore velocità nel tempo. Si può avere una variazione del vettore velocità ($\Delta\mathbf{v} \neq 0$) anche se il suo modulo è $|\mathbf{v}|$ = costante: è sufficiente che cambi la direzione. Infatti, **il vettore velocità è sempre tangente alla traiettoria**.
Per esempio, il vettore velocità associato al moto di un'automobile che viaggia a 50 km/h su un circuito circolare ha sempre lo stesso modulo, ma cambia direzione in ogni punto della traiettoria. In altre parole, **si può avere accelerazione diversa da zero anche se la velocità rimane costante in modulo**.



Nel caso di traiettoria curva, l'accelerazione del punto materiale che la percorre è sempre diversa da zero: in ogni punto, infatti, cambia quanto meno la direzione della sua velocità.

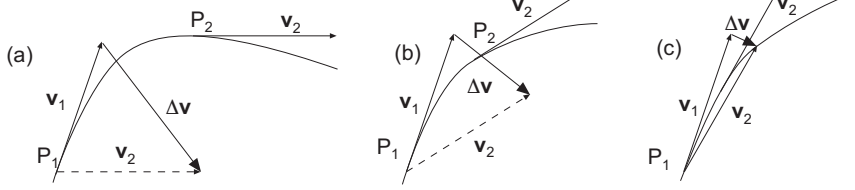
Analogamente a quanto visto per la velocità, un'informazione completa sull'accelerazione si ha quando gli intervalli di tempo nei quali la si misura sono piccoli. Si definisce così l'**accelerazione istantanea**:

$$\mathbf{a}_{\text{ist}} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{v}'(t)$$

Quali sono le dimensioni dell'accelerazione?
A partire dalla definizione, $a = \Delta v/\Delta t$, sostituendo alla velocità e al tempo le loro dimensioni, si ricavano quelle di a:

$$[a] = \frac{[\Delta v]}{[\Delta t]} = \frac{[\mathrm{L}]/[\mathrm{T}]}{[\mathrm{T}]} = \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]} \cdot \frac{1}{[\mathrm{T}]} = \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]^2}$$

Si consideri un corpo in movimento lungo una traiettoria curvilinea con velocità costante in modulo: l'accelerazione è diversa da zero ed è diretta come $\Delta\mathbf{v}$ (caso a della figura sottostante). Se l'intervallo di tempo diminuisce, i vettori velocità in due istanti successivi arrivano quasi a coincidere e la differenza di velocità si dispone lungo una direzione che tende a diventare perpendicolare a tali vettori (caso b); al limite, l'accelerazione istantanea sarà perfettamente perpendicolare alla velocità e quindi diretta verso il centro della curva (caso c).
Perciò si parla in questi casi di **accelerazione centripeta**.



2.3 | Moti particolari

Si procede a una carrellata dei principali moti particolari e delle loro proprietà. In generale:

Il moto è **rettilineo** quando la velocità **v** ha *direzione costante* (il modulo può variare).
Il moto è **uniforme** quando la velocità **v** ha *modulo costante* (la direzione può variare).

È rettilineo il moto di un atleta che percorre i 100 metri piani, anche se la sua velocità aumenta progressivamente in modulo. È uniforme il moto della punta di una lancetta di orologio, anche se la traiettoria descritta non è diritta ma circolare.

2.3.1 | Moto rettilineo uniforme

È il moto più semplice, in cui la velocità **v** è costante in direzione, modulo e verso. In questo caso:

$$\mathbf{v}_{\text{media}} = \mathbf{v}_{\text{istantanea}} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato a percorrerlo}} = \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t}$$

Da cui:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}; \quad \Delta t = \frac{\Delta s}{v}; \quad \Delta \mathbf{s} = \mathbf{v} \cdot \Delta t$$

Legge oraria del moto rettilineo uniforme

Per *legge oraria* di un moto si intende la relazione che esprime lo spazio in funzione del tempo. Nel caso del moto rettilineo uniforme, la legge oraria assume la forma:

$$\mathbf{s} = \mathbf{v} \cdot t$$

Se all'istante iniziale t_0 il corpo aveva già percorso un tratto s_0, la legge oraria diventa:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v} \cdot t$$

Un'automobile procede alla velocità costante di 72 km/h. Quanti metri percorre in 5 secondi?

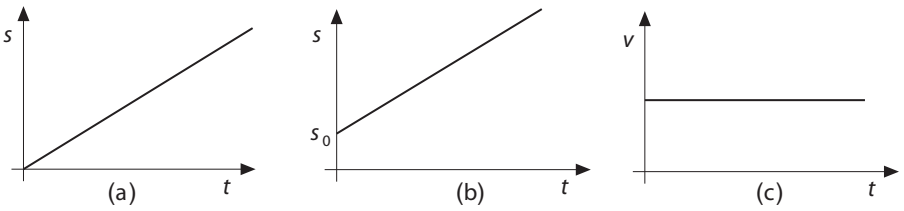
Si converte la velocità in m/s (72 km/h = 20 m/s) e si procede al calcolo secondo la legge oraria:

$$s = v \cdot t \Rightarrow s = 20 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} = 100 \text{ m}$$

Rappresentazione grafica del moto rettilineo uniforme

Il moto rettilineo uniforme è regolato da leggi che legano tra loro le variabili spazio, tempo e velocità. È possibile rappresentare tali legami con delle curve piane in un sistema di assi cartesiani.

Si possono disegnare grafici di tipo *spazio-tempo* e *velocità-tempo*. Se $s_0 = 0$, spazio e tempo sono legati dalla legge oraria $s = v \cdot t$: si tratta di grandezze direttamente proporzionali e la rappresentazione grafica della legge oraria è una semiretta passante per l'origine degli assi cartesiani *spazio-tempo* (figura a). Se $s_0 \neq 0$, la legge oraria assume la forma $s = s_0 + v \cdot t$ e la semiretta che la rappresenta non passa per l'origine degli assi (figura b). Nel piano *velocità-tempo* (figura c), la rappresentazione grafica del moto rettilineo uniforme è invece una semiretta parallela all'asse dei tempi che interseca l'asse delle ordinate in corrispondenza del valore costante della velocità.



Il moto rettilineo uniforme di un punto materiale si può sempre rappresentare graficamente nel piano spazio-tempo con una retta il cui coefficiente angolare è numericamente uguale alla velocità del punto.

2.3.2 | Moto rettilineo uniformemente accelerato

Se in un moto l'accelerazione è costante, il moto si dice *uniformemente accelerato*.
Per il moto uniformemente accelerato la velocità raggiunta dopo avere accelerato per un tempo t vale:

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a} \cdot t$$

dunque passando ai moduli:

$$v_f = v_0 + a \cdot t$$

Legge oraria del moto rettilineo uniformememente accelerato
Nel caso del moto uniformemente accelerato lo spazio percorso dopo un tempo t (legge oraria) è:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot t^2$$

dunque passando ai moduli:

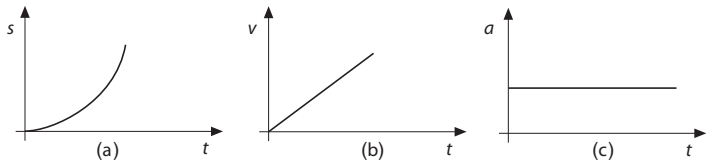
$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

dove $\mathbf{v}_0$ e $\mathbf{v}_f$ sono la velocità iniziale e finale, $\mathbf{s}_0$ è lo spazio iniziale, $\mathbf{a}$ è l'accelerazione (costante) e t è il tempo trascorso dall'istante iniziale.

Rappresentazione grafica del moto uniformemente accelerato
In questo caso i grafici possono essere del tipo *spazio-tempo*, *velocità-tempo* e *accelerazione-tempo*. Nel primo caso il legame tra s e t è dato dalla legge oraria:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Nel caso particolare $s_0 = v_0 = 0$, si ha $s = \frac{1}{2} a \cdot t^2$, la cui rappresentazione grafica nel piano *spazio-tempo* è una parabola con vertice nell'origine degli assi (figura a).
Dalla relazione $v = a \cdot t$ (quando $v_0 = 0$) si nota una diretta proporzionalità tra v e t. Così, la rappresentazione grafica del moto uniformemente accelerato nel piano *velocità-tempo* è una semiretta passante per l'origine degli assi, il cui coefficiente angolare è pari al valore dell'accelerazione (figura b).
Infine, la rappresentazione grafica dell'accelerazione in funzione del tempo nel piano *accelerazione-tempo* è una retta orizzontale che interseca l'asse delle ordinate in corrispondenza del valore costante dell'accelerazione (figura c).



2.3.3 | Moto di caduta dei gravi

L'importanza che riveste il moto uniformemente accelerato è dovuta al fatto che la caduta libera dei gravi sulla Terra è un moto di questo tipo. Per questo motivo il moto di caduta dei gravi è chiamato anche moto *naturalmente accelerato*.

In particolare, nel campo gravitazionale si ha:

$$a = g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$$

Il *modulo* dell'accelerazione gravitazionale $\mathbf{g}$ varia in effetti con la latitudine e l'altitudine; in particolare, diminuisce passando dai poli all'equatore e diminuisce con l'aumentare della distanza dalla superficie terrestre. Le variazioni sono però talmente piccole che g può essere considerato costante sulla superficie terrestre. Il vettore $\mathbf{g}$ è sempre *diretto* lungo la verticale, *verso* il basso.

 © Alpha Test

Trattandosi di un moto uniformemente accelerato, valgono le stesse leggi viste nel § 2.3.2. Indicando con h l'altezza del grave che cade lungo la verticale (rispetto a terra, per esempio), si ha:

$$h = h_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \qquad [1]$$

dove h_0 è la posizione iniziale, v_0 è l'eventuale velocità iniziale del grave; il segno – appare perché l'accelerazione è diretta verso il basso, cioè verso altezze decrescenti.

Se $h_0 = v_0 = 0$, la [1] assume la forma:

$$h = -\frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Per un corpo lasciato cadere da un'altezza h_0 con velocità iniziale nulla si ha:

$$\text{tempo di caduta} = t_c = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

$$\text{velocità finale} = v_f = \sqrt{2gh_0}$$

Per un corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0 si ha:

$$\text{altezza max raggiunta} = h = \frac{v_0^2}{2g}$$

$$\text{tempo necessario per raggiungerla} = t_h = \frac{v_0}{g}$$

Si noti che **nessuna delle grandezze appena definite per un corpo in caduta libera dipende dalle caratteristiche particolari del corpo** (per esempio massa, materiale, forma).

Un oggetto avente massa m = 28 kg viene lanciato verso l'alto con una velocità v_0 di 9,8 m/s. Si calcoli la massima altezza raggiunta, il tempo impiegato per raggiungerla e quello impiegato per tornare all'altezza iniziale.

Si utilizzano le formule viste sopra. La massima altezza raggiunta è:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{96{,}04\ \text{m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 9{,}8\ \text{m}/\text{s}^2} = 4{,}9\ \text{m}$$

Il tempo di salita è:

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{9{,}8\ \text{m}/\text{s}}{9{,}8\ \text{m}/\text{s}^2} = 1\ \text{s}$$

Si noti che la massa dell'oggetto lanciato non influisce sui risultati ottenuti.

Una volta arrivato all'altezza massima il corpo ricade con moto naturalmente accelerato: si tratta dunque di calcolare in quanto tempo il grave ripercorre i 4,9 metri di altezza raggiunti. Si può utilizzare la formula per il tempo di caduta e si ottiene:

$$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}9\ \text{m}}{9{,}8\ \text{m}/\text{s}^2}} = 1\ \text{s}$$

In generale il tempo necessario per raggiungere una certa altezza è pari al tempo necessario per ripercorrerla a ritroso, in caduta libera. Nello stesso modo si dimostra che la velocità iniziale verso l'alto è la stessa con cui il corpo ritransita per il punto di partenza.

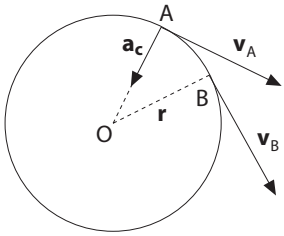
2.3.4 | Moto circolare uniforme

È il moto di un punto che descrive una traiettoria circolare con velocità costante in modulo.

Si definiscono:

- T = **periodo** = tempo impiegato a compiere una rotazione completa.
- ν = **frequenza** = numero di rotazioni al secondo.

T e ν sono grandezze scalari aventi rispettivamente per unità di misura i secondi e i s^{-1} = hertz (simbolo: Hz).



Dalla definizione di velocità, si ha:

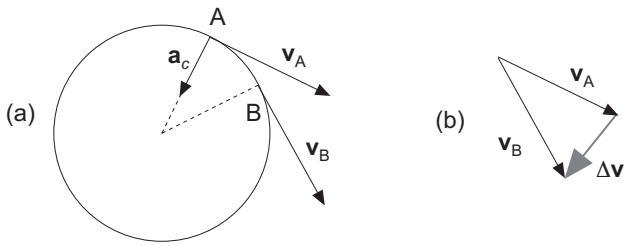
$$|\mathbf{v}_A| = |\mathbf{v}_B| = \frac{\text{lunghezza della circonferenza}}{\text{periodo di rotazione}} = \frac{2\pi r}{T} = \text{costante}$$

Nel moto circolare uniforme il modulo della velocità è costante, mentre la sua direzione è in ogni punto tangente alla circonferenza (e quindi perpendicolare al raggio). Dato che la direzione della velocità cambia continuamente, il punto materiale che si muove di moto circolare uniforme è sottoposto a un'accelerazione sempre diversa da zero, diretta verso il centro della circonferenza. Tale accelerazione, detta **accelerazione centripeta**, è di conseguenza sempre perpendicolare alla velocità istantanea del punto.

Nel moto circolare uniforme, il vettore accelerazione centripeta $\mathbf{a}_c$ ha le seguenti caratteristiche.

Direzione radiale in ogni punto; *verso* dall'esterno al centro della circonferenza; *modulo* costante, dato dal rapporto fra il quadrato della velocità e il raggio della circonferenza:

$$a_c = v^2/r$$



Si ha accelerazione centripeta ogni volta che la velocità varia in direzione!

L'accelerazione centripeta è sempre perpendicolare alla velocità: anche per il moto circolare valgono le considerazioni fatte a pagina 598.

Un punto materiale si muove lungo il bordo di un disco a velocità costante e compie quattro giri ogni due secondi. Quanto vale il periodo? Quanto vale l'accelerazione centripeta se il raggio del disco è 1 cm?

Nel moto circolare uniforme il periodo è definito come il tempo necessario a compiere un giro; il problema dà invece la frequenza:

$$\nu = 4/(2\text{ s}) = 2\text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad T = 1/\nu = 0{,}5\text{ s}$$

Conoscendo il raggio della traiettoria è possibile calcolare lo spazio percorso in un periodo, e dunque l'accelerazione centripeta:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad a_c = \frac{v^2}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Nel sostituire i valori numerici si deve fare attenzione al raggio, che nel testo è dato in cm e va trasformato in metri (se non diversamente specificato, è bene usare le unità del SI):

$$a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 10^{-2}\text{ m}}{(0{,}5\text{ s})^2} = 1{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

 © Alpha Test

Nel moto circolare, accanto alla velocità lineare del punto materiale che si sposta lungo la circonferenza, si definisce anche una **velocità angolare media** ω, data dal rapporto fra l'angolo al centro *spazzato* dal raggio vettore (il vettore radiale che ha origine nel centro della circonferenza ed estremo sul punto materiale) e il tempo impiegato a spazzarlo:

$$\omega_{media} = \Delta\theta / \Delta t$$

Nel moto circolare uniforme, la **velocità angolare** è un vettore con queste caratteristiche:
Direzione perpendicolare al piano di rotazione;
Verso uscente dal piano di rotazione se questa è antioraria, entrante nel piano se è oraria;
Modulo costante e pari a:

$$\omega = 2\pi_{rad} / T = 2\pi\nu$$

L'angolo di ampiezza 2π equivale all'angolo di 360° espresso in radianti; il **radiante** è l'angolo al centro di una circonferenza che insiste su un arco lungo quanto il raggio.

Per riepilogare, nel moto circolare uniforme valgono le seguenti relazioni:

$$T = \frac{1}{\nu}; \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}; \qquad v = \omega \cdot r; \qquad \omega = \frac{v}{r}; \qquad a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Mentre il modulo della velocità v dipende dalla distanza dal centro di rotazione (ossia dal raggio r), ω ne è indipendente.

Un corpo celeste ha periodo di rotazione T pari a 36 ore. Detta ω la sua velocità angolare e ω_T quella terrestre, quale delle due è minore?

La relazione tra il periodo di un moto e la sua velocità angolare è $\omega = 2\pi / T$.
Le velocità angolari del corpo celeste e della Terra valgono rispettivamente:

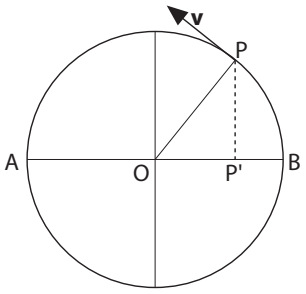
$$\omega = \frac{2\pi}{36\ \text{h}} \quad \text{e} \quad \omega_T = \frac{2\pi}{24\ \text{h}}$$

Si conclude che $\omega < \omega_T$.

2.3.5 | Moto oscillatorio armonico

Il moto oscillatorio armonico è, come il moto circolare uniforme, un moto periodico; precisamente è il moto che compie il punto P' (proiezione di P lungo il diametro AB) quando P si muove di moto circolare uniforme.

- La velocità di P' è la proiezione di **v** sul diametro AB: è massima in O e nulla in A e B, dove P' inverte il moto.
- L'accelerazione di P' è proporzionale allo spostamento OP': è massima in A e in B ed è nulla in O.



La legge oraria di tale moto è rappresentata graficamente da una sinusoide:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi)$$

dove A è l'ampiezza massima dell'oscillazione (nell'esempio è la distanza tra il centro dell'oscillazione O e gli estremi dell'oscillazione, ovvero $A = \overline{AB}/2$), φ è un parametro detto *fase iniziale* che tiene conto delle condizioni iniziali e ω prende il nome di *pulsazione* e ha le dimensioni di un inverso del tempo.

Un corpo appeso a una molla inizialmente allungata, una volta lasciato libero, compie, in assenza di attriti, un moto oscillatorio armonico. Per piccole oscillazioni, un pendolo o un'altalena in assenza di attriti compiono un moto oscillatorio armonico.
Se non intervengono forze esterne, tale moto si ripete periodicamente nel tempo senza mai arrestarsi.

2.4 | Moti composti

2.4.1 | Composizione di moti uniformi

Si consideri un passeggero che si sposta con velocità costante **v** lungo la carrozza di un treno in moto su un binario rettilineo con velocità costante **u**. Un osservatore fermo a terra che guardi il treno vedrà il passeggero muoversi a una velocità diversa da **v**, e in particolare: se il passeggero cammina nella stessa direzione del treno, la sua velocità rispetto al suolo sarà maggiore di **u**; viceversa, se cammina in direzione opposta, l'osservatore a terra lo vedrà muoversi più lentamente del treno. Si parla in questi casi di *moto relativo*, poiché la sua descrizione dipende dal sistema di riferimento prescelto. Si parla inoltre di *velocità relativa* (del passeggero rispetto al sistema in moto, nell'esempio **v**), di *velocità di trascinamento* (quella del sistema in moto rispetto alla Terra, nell'esempio **u**) e di *velocità assoluta* (del passeggero rispetto alla Terra).

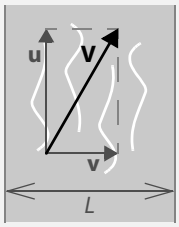
Il moto risultante dalla composizione di un moto uniforme a velocità **v** in un sistema di riferimento a sua volta in moto uniforme con velocità **u** è ancora un moto uniforme, con velocità **V** data dalla somma vettoriale delle due velocità:

$$\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

Se **v** e **u** sono parallele, il moto risultante avviene lungo la stessa direzione.

Se **v** e **u** sono ortogonali, ovvero se un corpo si muove in direzione ortogonale rispetto alla velocità di trascinamento, può essere comodo descrivere il suo moto, in ogni istante, ragionando in maniera separata lungo due assi cartesiani: uno allineato alla direzione del moto relativo e l'altro allineato a quella di trascinamento.

Per attraversare un fiume il cui letto è largo $L = 50$ m, alcuni gitanti si servono di una barca a remi. Riescono a sviluppare una velocità $v = 5$ m/s in direzione ortogonale alla corrente del fiume, che è pari a $u = 10$ m/s. A quale distanza a valle di quella da cui sono partiti arriveranno i gitanti sull'altra sponda del fiume?



Conviene ragionare separatamente lungo la direzione della corrente, che chiameremo *Y*, e lungo quella a essa perpendicolare in cui si sposta la barca, che chiameremo *X*.

In altre parole: la componente di **V** lungo *X* è **v**. Secondo la legge oraria del moto uniforme, è possibile calcolare il tempo necessario ad attraversare il fiume:

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{\Delta x}{v} = \frac{50\text{ m}}{5\text{ m/s}} = 10\text{ s}$$

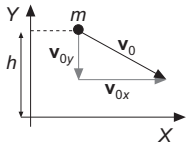
Poiché, inoltre, la componente di **V** lungo *Y* è **u**, adesso che conosciamo la durata dell'attraversamento possiamo calcolare l'effetto del trascinamento lungo il corso del fiume, ancora ricorrendo alla legge oraria del moto uniforme:

$$\Delta y = \Delta t \cdot u = 10\text{ s} \cdot 10\text{ m/s} = 100\text{ m}$$

2.4.2 | Composizione di moti uniformi con moti accelerati

Sia dato un corpo di massa *m* che, come indicato in figura, viene lanciato con una certa velocità iniziale $\mathbf{v}_0$ da un'altezza *h* sulla superficie terrestre. Analizziamo il moto scomponendolo lungo gli assi cartesiani.

Il corpo è soggetto solo all'accelerazione gravitazionale, che agisce esclusivamente lungo la verticale; di conseguenza il moto lungo la verticale è uniformemente accelerato. Al contrario, poiché non ci sono accelerazioni che agiscono lungo l'asse *X*, il moto lungo l'orizzontale non è accelerato.



© Alpha Test

Si scomponga quindi il moto di caduta sugli assi ortogonali *X* (orizzontale) e *Y* (verticale) e si indichino rispettivamente con $\mathbf{x}$, $\mathbf{v}_x$, $\mathbf{a}_x$ e $\mathbf{y}$, $\mathbf{v}_y$, $\mathbf{a}_y$ le componenti dello spostamento, della velocità e dell'accelerazione lungo l'asse *X* e lungo l'asse *Y*. Per quanto detto, ricordando le leggi orarie del moto uniforme e di quello uniformemente accelerato, si ha:

$$a_x = 0 \Rightarrow v_x = v_{0x} = \text{costante} \qquad a_y = g \Rightarrow v_y = -v_{0y} - g \cdot t$$

Se il corpo viene lanciato orizzontalmente, $v_{0y} = 0$ e le equazioni del moto lungo i due assi sono:

$$x = v_x \cdot t \qquad y = h - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

dalle quali si ottiene l'espressione analitica della traiettoria del corpo:

$$y = h - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_x^2}$$

Poiché g e v_x sono costanti, la rappresentazione grafica del moto nel piano *XY* è una parabola con concavità rivolta verso il basso e il moto è di tipo *parabolico*.

Quesiti svolti

1 **Un corpo puntiforme si muove di moto circolare uniforme. Indichiamo con *r* il raggio della circonferenza, con *v* la velocità periferica, con ω la velocità angolare, con *T* il periodo, con *f* la frequenza. Qual è la giusta espressione?**

A $T = v/2\pi r$

B $T = 2\pi r/v$

C $T = f/\pi$

D $T = \omega \cdot v$

E $T = \pi/v$

L'espressione corretta è la B: invertendola si ricava infatti la definizione di velocità, cioè spazio (la lunghezza della circonferenza) fratto tempo (il periodo).

È interessante verificare che le altre espressioni non sono dimensionalmente corrette (non hanno cioè le dimensioni di un tempo):

$$\text{A } \left[\frac{v}{2\pi r}\right] = \frac{[\mathrm{L}]/[\mathrm{T}]}{[\mathrm{L}]} = \frac{1}{[\mathrm{T}]}; \quad \text{C } \left[\frac{f}{\pi}\right] = [\mathrm{T}]^{-1};$$

$$\text{D } [\omega \cdot v] = [\mathrm{T}]^{-1} \cdot \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]} = \frac{[\mathrm{L}]}{[\mathrm{T}]^2}; \quad \text{E } \left[\frac{\pi}{v}\right] = \frac{1}{[\mathrm{L}]/[\mathrm{T}]} = \frac{[\mathrm{T}]}{[\mathrm{L}]}$$

2 **Quale delle seguenti quantità rappresenta il tempo di caduta di un grave che cade da un'altezza *h*?**

A $\sqrt{2gh}$ B $\sqrt{\frac{2h}{g}}$ C $2gh$ D $\frac{1}{2}gh^2$ E gh^2

Dalla teoria del moto uniformemente accelerato si ha che il tempo di caduta di un grave che parte da un'altezza h è $\sqrt{2h/g}$ (risposta B).

Per rispondere al quesito, se non si ricorda la formula e non si vuole ricavarla dalla teoria, si può utilizzare l'analisi dimensionale. Si può cioè controllare se le risposte fornite hanno le dimensioni di un tempo o no. La quantità riportata nella risposta A ha le dimensioni di una velocità, infatti:

$$[\sqrt{2gh}] = [\mathrm{L}]^{1/2}[\mathrm{T}]^{-1}[\mathrm{L}]^{1/2} = [\mathrm{L}][\mathrm{T}]^{-1}$$

Da questo si ricava facilmente che le dimensioni della quantità $2gh$ sono $[\mathrm{L}]^2[\mathrm{T}]^{-2}$ e quelle della quantità $1/2\ gh^2$ sono $[\mathrm{L}]^3[\mathrm{T}]^{-2}$. Anche le risposte C, D ed E sono pertanto errate. La risposta corretta è la B dato che la quantità ivi riportata è la sola che abbia le dimensioni di un tempo, infatti:

$$\left[\sqrt{\frac{2h}{g}}\right] = [\mathrm{L}]^{1/2}[\mathrm{T}][\mathrm{L}]^{-1/2} = [\mathrm{T}]$$

Si osservi che l'analisi dimensionale è valida in generale come metodo veloce di controllo degli eventuali calcoli effettuati nella risoluzione dei test.

 © Alpha Test

3 **Un aereo, partendo da fermo, raggiunge in 40 s la velocità di decollo, pari a 360 km/h. Qual è il valore medio dell'accelerazione che ha subito (g è l'accelerazione di gravità)?**

A 1,0 g
B 0,5 g
C 1,0 m/s^2
D 2,5 m/s^2
E 10 m/s^2

L'accelerazione media di un corpo, per definizione, è data dal rapporto tra la variazione di velocità e l'intervallo di tempo in cui avviene tale variazione: $a = \frac{v - v_0}{t}$

Sostituendo i valori si ottiene: $a = \frac{360 \text{ km/h} - 0 \text{ km/h}}{40 \text{ s}} = \frac{360 \text{ km/h}}{40 \text{ s}} = \frac{100 \text{ m/s}}{40 \text{ s}} = 2{,}5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

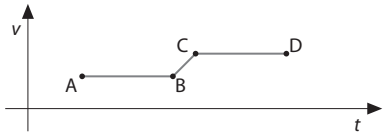
La risposta esatta è la **D**.

4 **Si abbia un moto in cui si percorrono spazi uguali in tempi uguali. Dica il candidato come chiamerebbe tale moto:**

A con velocità unitaria
B rettilineo ad accelerazione variabile
C uniformemente accelerato
D a velocità variabile
E uniforme

Dire che un corpo si muove percorrendo spazi uguali in tempi uguali equivale a dire che quel corpo ha una velocità costante: il suo moto è detto uniforme (risposta **E**).

5 **Il grafico mostra come varia nel tempo la velocità di un corpo che si muove di moto rettilineo.**



Nel tratto BC si ha:

A accelerazione nulla
B accelerazione uniforme
C accelerazione variabile
D non si può dire nulla sull'accelerazione perché nel grafico compare solo la velocità
E velocità nulla

Nel tratto BC il modulo della velocità aumenta con il passare del tempo: si ha quindi un'accelerazione diversa da zero. La relazione che lega la velocità con il tempo deve essere lineare (il tratto BC è rettilineo), cioè deve essere del tipo $v = v_0 + a \cdot t$. Tale relazione è caratteristica del moto rettilineo uniformemente accelerato: la risposta esatta è la **B**.

6 **Il tempo di frenata di una moto la cui velocità passa da 90 a 40 km/h è di 3 secondi. Il modulo dell'accelerazione media subita dal pilota è:**

A nulla
B pari a circa l'accelerazione di gravità g
C pari a circa $g/2$
D pari a circa $2g$
E infinita

Dato che la velocità della moto è passata da $v_1 = 90$ km/h a $v_2 = 40$ km/h, l'accelerazione è stata negativa (si parla anche di decelerazione).

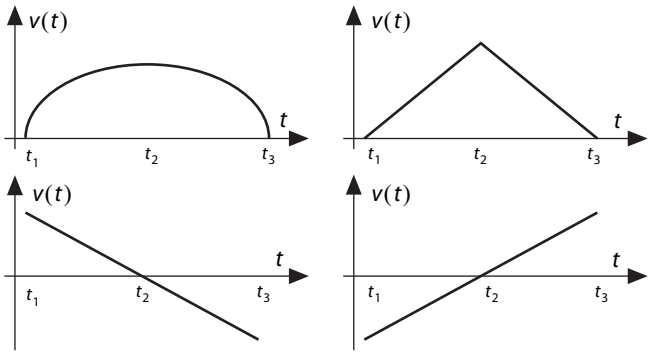
Il quesito però richiede solo il modulo dell'accelerazione e non il suo segno. È sufficiente una rapida lettura delle risposte proposte per capire che è necessario convertire tutte le misure date in unità di misura del Sistema internazionale.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40 \text{ km/h} - 90 \text{ km/h}}{3 \text{ s}} = \frac{-50 \text{ km/h}}{3 \text{ s}}$$

$$a \approx \frac{-15 \text{ m/s}}{3 \text{ s}} = -5 \text{ m/s}^2 \approx -\frac{1}{2}g \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{a}| \approx \frac{1}{2}g$$

La risposta corretta è la **C**.

7 **Consideriamo un tram nel percorso rettilineo tra due fermate. Se per metà percorso l'accelerazione è $a = a_1$, mentre nella seconda metà è $a = -a_1$, quale sarà il grafico della velocità? (a_1 è costante e positiva; t_1, t_2, t_3 sono gli istanti in cui il tram si trova rispettivamente all'inizio, a metà e alla fine del percorso).**



A Diagramma 1
B Diagramma 2
C Diagramma 3
D Diagramma 4
E Nessuno dei quattro

Nel caso di moto rettilineo uniformemente accelerato, il grafico della velocità in funzione del tempo è una retta, il cui coefficiente angolare è proprio l'accelerazione. L'unico diagramma che verifica correttamente la relazione $v(t) = v_0 + at$ è il secondo (risposta **B**).

Nella metà iniziale del percorso, il tram parte da fermo e aumenta la sua velocità con accelerazione costante e positiva (coefficiente angolare positivo della retta), finché non raggiunge la velocità massima in t_2. A questo punto inizia la fase di decelerazione costante (coefficiente angolare negativo). Per simmetria, la variazione di velocità a parità di tempo è la stessa, ma cambia il segno: si torna dunque a una velocità nulla alla fine del percorso.

 © Alpha Test

8 **Un'automobile parte da ferma e accelera costantemente lungo un rettilineo. Qual è la sua accelerazione, costante, perché percorra 1 chilometro in 25 secondi?**

A 80 m/s^2 **B** 3,2 m/s^2 **C** 1,6 m/s^2 **D** 1,6 m/s **E** 40 m/s^2

Vengono forniti lo spazio di accelerazione e il tempo impiegato e viene chiesto il valore dell'accelerazione. La relazione del moto uniformemente accelerato che lega le tre variabili è:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + (1/2)\, a \cdot t^2$$

che, nel caso in questione si trasforma nella più semplice:

$$s = (1/2)\, a \cdot t^2$$

(la velocità iniziale v_0 è infatti nulla e si può porre $s_0 = 0$). Quindi:

$$a = \frac{2\ s}{t^2} = \frac{2000}{625}\ \frac{m}{s^2}$$

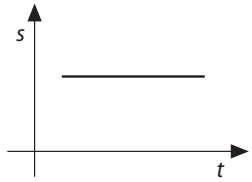
Per rispondere al quesito **non è necessario svolgere la divisione**. La risposta esatta è la **B** in quanto il numero 625 è contenuto circa 3 volte nel numero 2000.

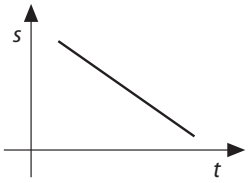
9 **È possibile che un corpo che si muove di moto uniforme sia dotato di accelerazione?**

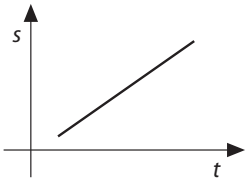
A No, mai
B Sì, se il moto è rettilineo
C Sì, se la traiettoria è curva
D Sì, se il corpo è sottoposto alla forza peso
E No, se la velocità è molto piccola

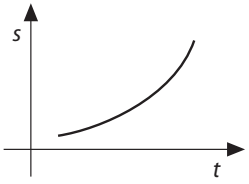
Se un corpo si muove di moto uniforme lungo una traiettoria curva, anche se il modulo della velocità è costante, la sua direzione varia continuamente. Come conseguenza, il corpo è soggetto a un'accelerazione diretta verso il centro della curva, detta accelerazione centripeta. La risposta esatta è quindi la **C**.

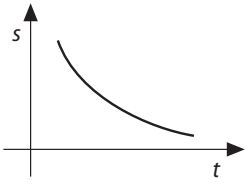
10 **Se la velocità di un'automobile è costante, qual è il grafico che individua l'andamento dello spazio percorso *s* in funzione del tempo *t*?**

A


B


C


D


E


Se la velocità dell'automobile è costante, essa si muove di moto rettilineo uniforme e la legge oraria del moto è $s = v \cdot t$ dove s è lo spazio, t è il tempo e v è il modulo della velocità. Nel moto rettilineo uniforme spazio e tempo sono quindi direttamente proporzionali e il grafico che li rappresenta nel sistema di assi ortogonali *s-t* è una retta crescente. La risposta esatta è la **C**.

11 **Un'auto percorre 15 km in 10 minuti e, successivamente, 5 km in 5 minuti. La sua velocità media è:**

A 50 km/h **B** 60 km/h **C** 70 km/h **D** 80 km/h **E** 90 km/h

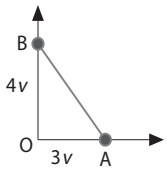
Per calcolare la velocità media dell'auto è necessario conoscere la strada totale percorsa e il tempo impiegato. In totale l'auto percorre (15 + 5) km = 20 km in (10 + 5) min = 15 min e la sua velocità media è quindi:

$$v_{\text{media}} = \frac{20\ \text{km}}{15\ \text{min}} = \frac{20\ \text{km}}{(1/4)\ \text{h}} = 80\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$$ (risposta **D**)

12 **Due mobili partono contemporaneamente dall'origine di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. L'uno si muove con velocità $3v$ lungo l'asse x e l'altro con velocità $4v$ lungo l'asse y. La velocità con cui i due mobili si allontanano l'uno dall'altro è:**

A $1\,v$ **B** $3\,v$ **C** $5\,v$ **D** $7\,v$ **E** $9\,v$

In questi casi è molto utile rappresentare graficamente il problema indicando con A e B i due corpi.



La velocità di allontanamento tra A e B è pari alla lunghezza dell'ipotenusa (disegnata in figura).

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAB si deduce che la risposta esatta è la **C**.

13 **Un treno, viaggiando a velocità costante di 100 km/h, va da una città A a una città B in quattro ore. Si supponga che, arrivato in B, inverta immediatamente il verso di marcia e ritorni ad A con una velocità costante, ma diversa da quella dell'andata. Quale deve essere la velocità di ritorno perché la velocità media nel tragitto complessivo A-B-A sia di 200 km/h?**

A 300 km/h
B 400 km/h
C 500 km/h
D 600 km/h
E Infinita

L'errore che non bisogna fare è il seguente: dato che la media aritmetica tra 100 e 300 è 200, se la velocità media nel percorso di andata è pari a 100 km/h, affinché la velocità media del tragitto complessivo sia 200 km/h, il treno deve tornare con una velocità pari a 300 km/h. Per rendersi conto dell'errore commesso nella deduzione precedente si ragioni come segue: il tragitto complessivo di andata e ritorno è lungo 800 km (il treno impiega 4 ore per andare da A a B procedendo alla velocità di 100 km/h). Procedendo alla velocità media di 200 km/h (che è quanto richiesto dal problema) occorrono 4 ore per percorrere l'intero percorso (800 km). Il treno ha dunque a disposizione 4 ore per percorrere il tragitto di andata e ritorno (A → B → A). Avendo però già utilizzato 4 ore per il solo tragitto di andata (A → B), per rispettare la condizione richiesta il treno dovrebbe percorrere il tragitto di ritorno (B → A) senza impiegare tempo, cioè istantaneamente e quindi con una velocità infinita (risposta **E**).

Più correttamente il quesito (tratto da un test ufficiale degli anni passati) avrebbe dovuto riportare la risposta: «la condizione richiesta non è realizzabile».

© Alpha Test

14 **Un ciclista *T* segue un ciclista *V* a una distanza di 1 km e i due procedono alla medesima velocità. La strada improvvisamente inizia a salire con pendenza costante. Ammesso che ciascuno dei ciclisti dimezzi la sua velocità dall'istante in cui inizia la salita, qual è la loro distanza quando ambedue sono nel tratto in salita?**

A 1 km
B 2 km
C 500 m
D 250 m
E Non è nota se non si conosce la velocità iniziale dei ciclisti

Vi sono più modi per risolvere il quesito; uno dei più rapidi è il seguente: quando i due ciclisti si trovano in piano sono separati da una **distanza temporale** pari a $t = \frac{1000\ \text{m}}{v}$ dove v è la velocità comune dei due ciclisti. Quando entrambi i ciclisti si trovano sul tratto in salita la loro distanza spaziale è diminuita, la loro velocità è dimezzata **ma la distanza temporale è rimasta la stessa**. Indicando con x la distanza spaziale dei due corridori che si trovano in salita si ha:

$$\frac{1000\ \text{m}}{v} = \frac{x}{v/2} \quad \Rightarrow \quad x = 500\ \text{m} \quad \text{(risposta C)}$$

15 **Sia data la seguente equazione per un moto di caduta di un grave: $s = 0{,}5gt^2 + k$, dove s rappresenta lo spazio, t il tempo e g l'accelerazione di gravità. Niente viene detto del termine k. Dica il candidato quali sono le dimensioni di k, se si indicano con M la massa, con L la lunghezza e con T il tempo.**

A $[T^{-1}]$
B $[ML^{-1}]$
C $[L^2T^{-3}]$
D $[L]$
E $[L^{-1}]$

I membri dell'uguaglianza riportata nel testo del problema devono avere le stesse dimensioni. Il fatto che a sinistra dell'uguale compaia la grandezza "spazio", che ha dimensioni $[L]$, è già sufficiente a concludere che anche le dimensioni della grandezza k devono essere $[L]$, anche senza sapere che k è in realtà lo spazio iniziale s_0.
Si noti che l'operazione di somma a membro destro, permessa solo fra grandezze omogenee, implica che anche il primo addendo deve avere dimensioni $[L]$.

3 Dinamica

La dinamica è la scienza che **studia e descrive le relazioni fra il moto di un corpo e le *cause* che lo hanno prodotto**, cioè **le forze**.

3.1 | Principio di relatività galileiana

Galileo, eseguendo un *esperimento ideale*[1], giunse alla conclusione che, dall'interno di una «navicella», è impossibile valutare se questa è ferma o si muove di moto rettilineo uniforme. In altre parole egli constatò che **non è possibile distinguere lo stato di quiete da uno stato di moto con accelerazione nulla**.

Più precisamente si può affermare che:

Le leggi della fisica sono le stesse per tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme gli uni rispetto agli altri.

3.2 | Forze, sistemi inerziali e leggi della dinamica

Dato un punto materiale libero di muoversi, la forza è una grandezza fisica che, se applicata a tale punto, è in grado di modificarne lo stato di moto o di quiete.

La dinamica spiega le relazioni forze-moto attraverso le sue tre leggi fondamentali.

3.2.1 | Sistemi inerziali e prima legge della dinamica

Esiste almeno un osservatore per il quale, se un punto materiale è fermo e su di esso non agisce alcuna forza, questo rimane fermo. Questo **osservatore** si dice **inerziale**.

I sistemi di riferimento in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto a un sistema di riferimento inerziale sono anch'essi inerziali.

Con buona approssimazione, un sistema inerziale è rappresentato dal sistema cosiddetto delle "stelle fisse". La Terra non è un sistema di riferimento inerziale perfetto a causa dei suoi moti di rotazione e di rivoluzione attorno al Sole, tuttavia viene considerata una buona approssimazione di un sistema inerziale su brevi intervalli di tempo.

Il concetto di sistema di riferimento inerziale permette di enunciare la prima legge della dinamica o principio di inerzia:

In ogni sistema di riferimento inerziale un corpo su cui non agisce alcuna forza o sul quale agiscono forze in equilibrio (a risultante nulla) mantiene il suo stato di moto (rettilineo uniforme) o di quiete.

In assenza di forze, la velocità vettoriale di un punto materiale rimane costante: in assenza di forze non si può avere accelerazione.
Così, una nave spaziale in movimento, sulla quale non agiscono forze, continua a muoversi di moto rettilineo uniforme ($\mathbf{a} = 0$) senza bisogno di alcun propulsore.

1. Un esperimento ideale è un progetto di esperimento (pensato anche nei minimi particolari) di cui si immaginano i risultati senza però realizzarlo praticamente.

Per comprendere il principio di inerzia è necessario slegarsi dal senso comune secondo il quale per muoversi con velocità costante è indispensabile far uso di un motore. Un'automobile, per esempio, si muove a velocità costante in autostrada solo grazie alla forza esercitata dal motore. Ma tale forza è in ogni istante uguale e contraria alle forze di attrito cui l'autovettura è soggetta, che si oppongono al moto. Si è quindi nella condizione di un corpo cui sono applicate forze a risultante nulla e per il quale vale la prima legge della dinamica.

3.2.2 | Seconda legge della dinamica

Se si applica una forza **F** a un corpo e si misura la sua accelerazione **a**, si nota una proporzionalità diretta tra le due grandezze:

$$\frac{F}{a} = m$$

La costante di proporzionalità dipende dal corpo e prende il nome di *massa inerziale*.

La massa inerziale di un corpo esprime l'*inerzia* (ossia la **resistenza**) **che il corpo oppone a una variazione del suo stato di moto.**

Dato un corpo di massa *m*, per imprimergli una accelerazione **a** è quindi necessario applicare una forza **F** tale che:

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \qquad \text{dove } m = \text{massa inerziale} \qquad [2]$$

Allo stesso modo, se su un corpo di massa *m* agiscono più forze, esso subisce un'accelerazione data dalla [2], dove **F** è la risultante delle forze applicate al corpo.

Si noti che la [2] è una relazione vettoriale.

3.2.3 | Forze fittizie o apparenti

Trovandosi in un sistema non inerziale, si è portati a introdurre delle forze aggiuntive per poter applicare il principio di inerzia. Tali forze non sono reali e vengono per questo denominate **fittizie** o **apparenti**.

Un osservatore su un treno in frenata che vede cadere la propria valigia è portato a supporre l'esistenza di una forza responsabile della caduta.

Un corpo in moto circolare uniforme è sottoposto a una accelerazione diretta verso il centro della traiettoria (accelerazione centripeta), il cui modulo è:

$$a = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Dalla [2] si deduce che il corpo, per poter mantenere la traiettoria circolare deve essere soggetto a una forza il cui modulo vale:

$$F = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Sempre dalla [2] si deduce che tale forza ha la stessa direzione e lo stesso verso dell'accelerazione: è diretta radialmente e orientata verso il centro della circonferenza. Questa forza prende il nome di **forza centripeta**.

Se venisse a mancare la forza centripeta, il corpo abbandonerebbe immediatamente la traiettoria circolare e proseguirebbe indisturbato lungo la retta tangente alla traiettoria nel punto in cui è cessata la forza, con un moto rettilineo uniforme. Così un autobus che sta curvando, rimane legato al centro della curva da una forza centripeta dovuta all'attrito delle gomme sull'asfalto.

Se un osservatore a terra studiasse il moto di un oggetto libero di muoversi sull'autobus, lo vedrebbe muoversi in linea retta in accordo con il principio d'inerzia, fino a colpire una parete dell'autobus. Al contrario, per un osservatore che si trova sull'autobus in curva (sistema non inerziale perché accelerato) l'oggetto si muoverebbe verso l'esterno della curva. Per giustificare questo movimento, l'osservatore solidale con l'autobus immagina l'esistenza di una forza fittizia, a cui si dà il nome di **forza centrifuga**, uguale e contraria alla forza centripeta.

 © Alpha Test

3.2.4 | Dimensioni e unità di misura delle forze

Dalla [2] si ricavano le dimensioni della forza.

$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$

Dimensioni: $[F] = [M]\,[L]\,[T]^{-2}$
Unità di misura nel SI: $N = kg\ m\ s^{-2}$

L'unità di misura della forza nel SI è il newton (N), definito come la forza che imprime a una massa unitaria (1 kg) una accelerazione unitaria (1 m/s^2). Le forze si misurano con il *dinamometro*.

L'unità di misura della forza nel sistema CGS è la dina (simbolo: dyn).
Quanti newton vale una dina?
Questo quesito consente di vedere un esempio importante di conversione tra unità di misura del SI e del CGS.

Si è visto che $1\ N = 1\ kg \cdot \frac{m}{s^2}$. Per analogia, nel CGS, $1\ dyn = 1\ g \cdot \frac{cm}{s^2}$.

Si tratta, per passare da N a dyn, di trasformare tutte le unità del SI in unità del CGS mediante equivalenze:

$$1\ N = 1\ kg \cdot 1\ \frac{m}{s^2} = (10^3\ g) \cdot \frac{10^2\ cm}{1\ s^2} = (10^3 \cdot 10^2)\ g \cdot \frac{cm}{s^2} = 10^5\ dyn$$

Si conclude così che $1\ N = 10^5\ dyn$ e naturalmente, viceversa, $1\ dyn = 10^{-5}\ N$.

3.2.5 | Teorema dell'impulso

Dalla [2] si ricava il *teorema dell'impulso,* il quale afferma che una forza **F** che agisce per un tempo *t* su un corpo di massa *m* provoca una variazione della sua *quantità di moto* ($\mathbf{P} = m \cdot \mathbf{v}$) pari al prodotto della forza con il tempo.

$$\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} = m \cdot \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m \cdot \mathbf{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} \rightarrow \mathbf{F} \cdot \Delta t = \Delta \mathbf{P}$$

Una massa di 5 kg inizialmente ferma è sottoposta all'azione di una forza di 90 N per due secondi. Trovare la velocità finale v della massa.
Il teorema dell'impulso afferma che la variazione della quantità di moto $m \cdot \mathbf{v}$ è pari al prodotto fra la forza e il tempo nel quale ha agito.

$$\Delta P = F \cdot \Delta t \rightarrow F \cdot \Delta t = 5\ kg \cdot v = 90\ N \cdot 2\ s \rightarrow v = \frac{180}{5}\ \frac{m}{s} = 36\ \frac{m}{s}$$

$$\mathbf{P}_1 = \sum m_i \cdot \mathbf{v}_{i,1} = \mathbf{P}_2 = \sum m_i \cdot \mathbf{v}_{i,2}$$

Principio di conservazione della quantità di moto: la quantità di moto totale di un sistema isolato è costante.

3.2.6 | Terza legge della dinamica o principio di azione e reazione

A ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria. Dati due corpi (1 e 2) interagenti si ha:

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \qquad [3]$$

dove $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ è la forza che il corpo 1 esercita sul corpo 2, e viceversa.

Le forze sono vettori e la [3] è una relazione vettoriale. Quindi le due forze $\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$ e $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ sono equidirezionali, hanno lo stesso modulo ma verso opposto.
Una forza e la corrispondente reazione sono applicate l'una a un corpo e l'altra sull'altro.

Una coppia di pattinatori è ferma su una pista. Per partire si danno una spinta l'uno contro l'altro, in direzione opposta. Se lui ha una massa di 80 kg, lei invece di 60 kg e l'accelerazione acquistata dalla pattinatrice grazie alla spinta è di 2 $\mathrm{m/s^2}$, quanto vale l'accelerazione del pattinatore?

Si tratta di applicare la [3], sostituendo alle forze il prodotto di massa e accelerazione:

$$F_1 = F_2 \;\Rightarrow\; m_1 \cdot a_1 = m_2 \cdot a_2 \;\Rightarrow\; a_2 = a_1 \cdot \frac{m_1}{m_2} = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{60\ \mathrm{kg}}{80\ \mathrm{kg}} = 1{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Al di là del risultato, si noti *dal punto di vista dimensionale* la formula risolutiva precedente: il rapporto tra le due masse è adimensionale, così, correttamente, sia a destra che a sinistra dell'uguale si trova un'accelerazione.

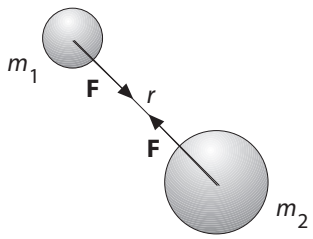
Sparando con un'arma da fuoco, la stessa forza che mette in moto il proiettile spinge in senso opposto anche l'arma. Si ha così l'effetto del *rinculo*. Poiché il proiettile e l'arma hanno masse diverse, per la seconda legge della dinamica le rispettive accelerazioni sono inversamente proporzionali e il proiettile acquista una velocità decisamente superiore a quella dell'arma.

3.3 | Legge di gravitazione universale

Due corpi dotati di massa e posti a distanza r l'uno dall'altro si attraggono con una **forza gravitazionale F** il cui modulo è dato dalla relazione seguente (detta *legge di gravitazione universale* o *legge di Newton*):

$$F = \mathrm{G} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad [4]$$

dove m_1 e m_2 indicano le **masse gravitazionali** dei due corpi e G è una costante detta *costante di gravitazione universale*, il cui valore è $\mathrm{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.



La massa *gravitazionale* è la caratteristica dei corpi responsabile della loro mutua attrazione gravitazionale.

Pur essendo associate a fenomeni fisici differenti, la massa *inerziale* e la massa *gravitazionale* di un corpo hanno la stessa unità di misura e lo stesso valore: nel seguito si parlerà spesso indistintamente di *massa*.

La forza gravitazionale tra due corpi è **sempre attrattiva**; è diretta lungo la congiungente i baricentri e la sua intensità è data dalla legge [4].

La forza gravitazionale è inversamente proporzionale al quadrato della distanza r tra le masse: cosa succede al modulo della forza quando r raddoppia?

A partire dalla legge di gravitazione universale, si sostituisce $2r$ a r:

$$F = \mathrm{G} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \;\Rightarrow\; F' = \mathrm{G} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{(2r)^2} = \mathrm{G} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{4r^2} = \frac{F}{4}$$

Il modulo della forza è diventato un quarto! In altre parole, allontanando due corpi dotati di massa – e dunque soggetti alla forza di gravitazione universale – questi si attraggono con una forza via via meno intensa. Viceversa, avvicinando i due corpi l'intensità aumenta.

© Alpha Test

3.4 | Forza peso

Nei pressi della superficie terrestre gli spostamenti in verticale sono trascurabili rispetto al raggio medio della Terra (6380 km). Allora si può dire che **tutti i gravi lasciati liberi di cadere sono sottoposti alla stessa accelerazione g**, detta *accelerazione gravitazionale terrestre*, il cui modulo è legato all'attrazione gravitazionale esistente tra la Terra e i corpi dotati di massa. Il suo valore medio è:

$$|\mathbf{g}| = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$$

Per la seconda legge di Newton, tale accelerazione è dovuta a una forza, detta **forza peso** e solitamente indicata con **P**, data da:

$$\mathbf{P} = \text{forza peso} = m \cdot \mathbf{g}$$

Il peso è una forza: si misura in newton.

Qual è il peso di un corpo avente massa $m = 1$ kg?
Per trovare il *peso* del corpo, basta sostituire in $P = m \cdot g$ i valori $m = 1$ kg e $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$:

$$\text{peso di 1 kg}_{massa} = 1\ \text{kg}_{peso} = 1\ \text{kg}_{massa} \cdot 9{,}8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = 9{,}8\ \text{kg}_{massa} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} = 9{,}8\ \mathrm{N}$$

In definitiva $1\ \text{kg}_{peso} = 9{,}8$ N (1 N è quindi pari a circa un decimo di kg_{peso}).

La **massa** di un corpo è una caratteristica intrinseca del corpo: è indipendente dal luogo dove il corpo si trova. È una grandezza *scalare*.
Il **peso** di un corpo dipende invece dal luogo nel quale il corpo si trova (per esempio sulla Terra oppure sulla Luna). Trattandosi di una forza, è una grandezza *vettoriale*.

Sulla Terra il kg_{massa} (unità di massa) ha massa unitaria e peso $P = 9{,}8$ N; lo stesso kg_{massa} sulla Luna avrebbe sempre massa unitaria, ma il suo peso sarebbe circa $1/6$ di quello sulla Terra (1,6 N), in quanto l'accelerazione gravitazionale lunare è sei volte più piccola dell'accelerazione gravitazionale terrestre.

3.5 | Densità e peso specifico

Per quanto detto su massa e peso, è possibile introdurre ora le definizioni di *densità* e *peso specifico*.

Densità: $\rho = \dfrac{m}{V}$

Dimensioni: $[\rho] = [\mathrm{M}] \cdot [\mathrm{L}]^{-3}$
Unità di misura nel SI: $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

La densità dell'acqua vale: $\rho_{H_2O} = 1000\ \mathrm{kg/m^3} = 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

Peso specifico: $p = \dfrac{m \cdot g}{V}$

Dimensioni: $[p] = [\mathrm{M}] \cdot [\mathrm{L}]^{-2} \cdot [\mathrm{T}]^{-2}$
Unità di misura nel SI: $\mathrm{N \cdot m^{-3}}$

Vale la relazione:

$$p_{specifico} = \rho \cdot g$$

Il peso specifico dell'acqua è:

$$p_{H_2O} = \rho_{H_2O} \cdot g = 1000\mathrm{kg/m^3} \cdot 9{,}8\mathrm{m/s^2} \approx 10.000\mathrm{N/m^3}$$

Densità relativa del corpo 2 rispetto al corpo 1: $\rho_{2,1} = \rho_2/\rho_1$

Peso specifico relativo del corpo 2 rispetto al corpo 1: $p_{2,1} = p_2/p_1$

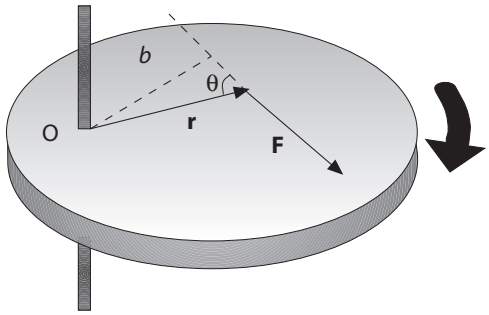
3.6 | Momento di una forza

Dato un *sistema di forze*, la sua **risultante** è, per definizione, il vettore che si ottiene sommando tra loro le forze costituenti il sistema. La risultante di più forze applicate a un punto materiale libero è la forza che, applicata da sola al punto materiale, produce lo stesso effetto che producono le altre insieme. Tuttavia, se il corpo sul quale sono applicate le forze non è puntiforme ma spazialmente esteso (ovvero se l'approssimazione a un punto materiale non può essere applicata), il sistema di forze non può generalmente essere ricondotto alla sola forza risultante: occorre introdurre una nuova grandezza: il *momento* di una forza.

Il **momento di una forza** rispetto a un punto è un indice della capacità della forza di *generare una rotazione* intorno al punto. Si definisce come prodotto vettoriale:

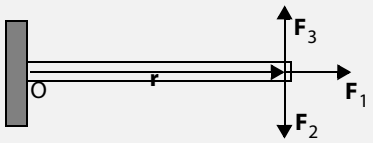
$$\tau = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad |\tau| = r \cdot \text{sen}\theta \cdot F$$

Il momento τ della forza **F** rispetto a un punto O è un vettore perpendicolare al piano individuato da **F** e dal suo *vettore posizione* **r**. Il modulo di τ è tanto maggiore quanto maggiore è la distanza di **F** da O.



La distanza tra il vettore **F** e il punto O è la lunghezza del segmento condotto da O perpendicolarmente alla direzione di **F**. Tale distanza prende il nome di braccio *b* della forza **F** rispetto al polo O.

Si applichino una per volta tre forze a un'asta rigida vincolata a un supporto, come in figura. In quale dei tre casi si ha rotazione?



Si può rispondere intuitivamente: la forza $\mathbf{F}_1$ non dà luogo ad alcuna rotazione; la forza $\mathbf{F}_2$ dà luogo a una rotazione oraria; infine $\mathbf{F}_3$ a una rotazione antioraria. Allo scopo di verificare come questo risultato sia correlato al momento della forza, lo si calcola ora nei tre casi, rispetto al punto di aggancio dell'asta O. Per il modulo, la direzione e il verso, secondo la definizione $|\tau| = r \cdot F \cdot \text{sen}\vartheta$ e la regola della mano destra, si ricava rispettivamente:

- $\tau_1 = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_1 \quad \Rightarrow \quad |\tau| = r \cdot F_1 \cdot \text{sen}0° = 0$;
- $\tau_2 = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_2 \quad \Rightarrow \quad |\tau| = r \cdot F_2 \cdot \text{sen}90° = r \cdot F_2$; τ entrante nel foglio;
- $\tau_3 = \mathbf{r} \wedge \mathbf{F}_3 \quad \Rightarrow \quad |\tau| = r \cdot F_3 \cdot \text{sen}90° = r \cdot F_3$; τ uscente dal foglio;

In generale, quando un sistema di forze dà luogo a un momento τ nullo rispetto a un polo O, il sistema di forze **non genera rotazione** rispetto a quel polo. Quando invece τ è diverso da zero, per la regola della mano destra è sempre diretto lungo una direzione perpendicolare al piano che contiene la forza e il raggio della forza: se τ è entrante nel piano allora la rotazione è **oraria**, e viceversa, se τ è uscente la rotazione è **antioraria**.

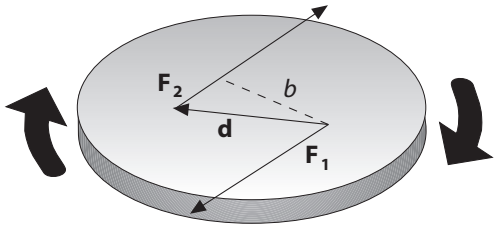
© Alpha Test

3.6.1 | Coppia di forze

Si tratta di un sistema composto da due forze parallele, di intensità *uguale*, ma verso opposto.

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} = 0$$

L'effetto di una coppia applicata a un *corpo rigido* libero è quello di generare una rotazione del corpo attorno a un asse ortogonale al piano individuato dalle due forze che compongono la coppia.



La coppia di forze, pur essendo un sistema di forze a risultante nulla, è in grado di generare una rotazione del corpo a cui è applicata.

Momento di una coppia di forze:

$$\tau = \mathbf{d} \wedge \mathbf{F}_1 \quad \Rightarrow \quad |\tau| = F \cdot b$$

dove F indica il modulo di una delle due forze, b la distanza tra le forze (braccio della coppia) e $\mathbf{d}$ infine è la distanza vettoriale fra i loro punti di applicazione.

Il momento di una coppia di forze è la somma dei momenti delle due forze che la compongono rispetto a un qualunque punto O del piano.

Il momento di una forza dipende dalla posizione del polo O mentre il momento di una coppia è lo stesso per tutti i punti del piano della coppia.

3.7 | Baricentro

Ogni sistema di forze è equivalente, dal punto di vista statico e dinamico, a un sistema composto dalla forza risultante e da una opportuna coppia di forze.

Si supponga di suddividere un corpo di massa M in tante parti di massa m_i, ciascuna delle quali soggetta alla forza peso. L'insieme di tali forze costituisce un sistema di forze parallele concordi che possono essere ricondotte a un'unica risultante avente come modulo la somma delle singole componenti.

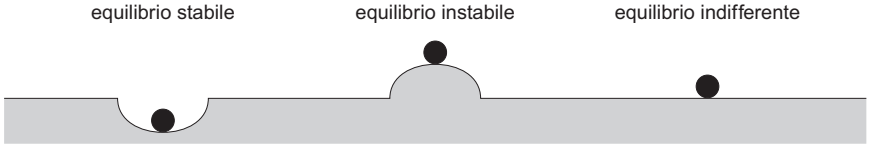
Il punto di applicazione della risultante di tutte le forze peso prende il nome di *centro di gravità* o *baricentro* del corpo.

Il centro di gravità o **baricentro** di un corpo o di un sistema di corpi è il punto in cui si può immaginare concentrato tutto il peso del corpo o del sistema di corpi.

- Qualunque sia la posizione di un corpo rispetto al terreno, la somma dei momenti delle forze gravitazionali rispetto al suo baricentro è nulla: un corpo posto nel campo gravitazionale e tenuto sospeso per il suo baricentro è in equilibrio (§ 3.8), comunque lo si orienti nello spazio.
- Il baricentro di un corpo esteso può anche essere esterno al corpo stesso (si pensi a un anello di materiale omogeneo: il suo baricentro coincide con il centro geometrico ed è quindi esterno al corpo).

3.8 | Equilibrio

In presenza della forza gravitazionale, si distinguono tre tipi di equilibrio a seconda del loro *grado di stabilità*. In particolare un equilibrio si dice **stabile** quando, in conseguenza a un elemento di disturbo, si origina una forza (una componente della forza peso) che tende a ripristinare la posizione di equilibrio. Le diverse situazioni possibili sono rappresentate nel diagramma che segue.



Più in generale, si dice che un corpo è in equilibrio (statico o dinamico) quando il suo *stato di moto* si mantiene costante: per stabilire se un corpo soggetto a forze è in equilibrio valgono i seguenti criteri, detti **equazioni fondamentali della statica**.

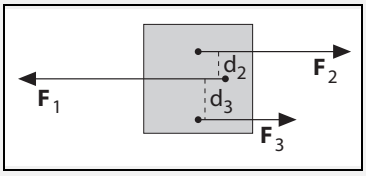
1. Un **punto materiale** è in equilibrio (non è soggetto ad alcuna accelerazione) se la risultante delle forze $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ..., $\mathbf{F}_n$ a esso applicate è uguale a zero:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0$$

2. Un **corpo rigido** (cioè un corpo esteso non assimilabile a un punto materiale) è in equilibrio se su di esso agiscono forze la cui risultante *e il cui momento risultante* sono nulli:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0 \qquad \tau = \sum_{i=1}^{n} \tau_i = 0$$

A un corpo rigido inizialmente fermo si applica un sistema di forze come in figura. Quali sono le condizioni per l'equilibrio?



$\mathbf{F}_1$ è opposta a $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$: perché la risultante sia nulla basta che il modulo di $\mathbf{F}_1$ sia uguale alla somma dei moduli di $\mathbf{F}_2$ e $\mathbf{F}_3$.

Il momento risultante delle forze non è nullo. Considerando il centro geometrico come polo di rotazione, in particolare, $\tau_1 = 0$, ma τ_2 e τ_3 sono diretti perpendicolarmente al foglio e hanno verso opposto (τ_2 entrante e τ_3 uscente, regola della mano destra). Oltre alla condizione sulle traslazioni, si deve dunque imporre quella sulle rotazioni:

$$\begin{cases} |\mathbf{F}_1| = |\mathbf{F}_2| + |\mathbf{F}_3| \\ |\mathbf{F}_2| \cdot d_2 = |\mathbf{F}_3| \cdot d_3 \end{cases}$$

3.9 | Macchine

Una macchina è un dispositivo con il quale è possibile vincere una data resistenza. La *forza motrice* $\mathbf{F}_m$ è la forza che compie l'azione; la *forza resistente* $\mathbf{F}_r$ è quella da vincere.

Vantaggio statico di una macchina: $V = |\mathbf{F}_r| / |\mathbf{F}_m|$

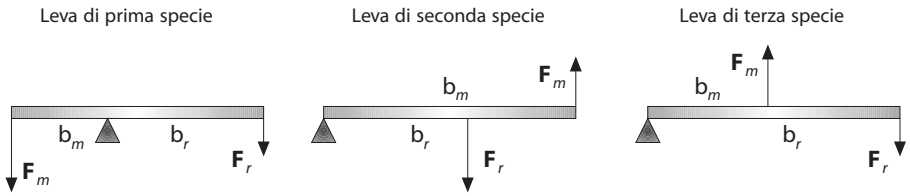
A seconda che V sia maggiore, minore o uguale a 1, la macchina sarà vantaggiosa, svantaggiosa o indifferente. Segue l'esame di alcuni tipi di macchine: leve, carrucole e piano inclinato.

© Alpha Test

3.9.1 | Leve

La leva è costituita da un'asta rigida girevole intorno a un asse a essa perpendicolare. Il **fulcro** è il punto di incontro fra asse e leva; i **bracci** sono la distanza tra i punti di applicazione di $\mathbf{F}_m$ e $\mathbf{F}_r$ e il fulcro. Le leve sono di *tre specie* a seconda delle posizioni di fulcro, forza motrice e resistenza:

1. **prima specie** (es: forbici): fulcro fra forza motrice $\mathbf{F}_m$ e resistenza $\mathbf{F}_r$; è vantaggiosa se $b_r < b_m$;
2. **seconda specie** (es: schiaccianoci): resistenza fra fulcro e forza motrice; sempre vantaggiosa;
3. **terza specie** (es: braccio umano): forza motrice fra fulcro e resistenza; sempre svantaggiosa.



Dalla condizione di equilibrio per i momenti delle forze rispetto al fulcro di una leva, si ricava la **condizione di equilibrio per le leve:**

$$F_m \cdot b_m = F_r \cdot b_r \quad \Rightarrow \quad F_m : F_r = b_r : b_m$$

dove $\mathbf{F}_m$, $\mathbf{F}_r$, b_m, b_r rappresentano la forza motrice, la forza resistente e i corrispondenti bracci d'azione.

Alice e Bob riescono a tenere un dondolo in equilibrio stando seduti alle due estremità. Se Alice ha una massa di 40 kg, quanto pesa Bob?

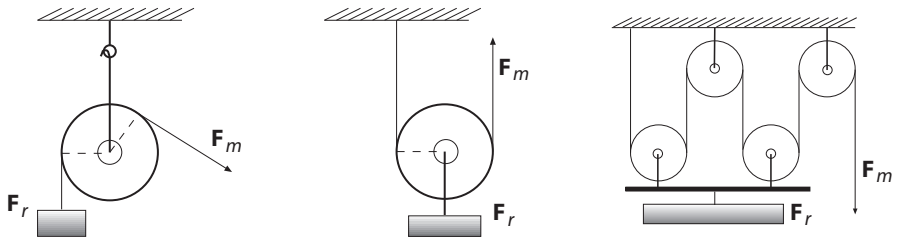
La risposta è intuitiva: dato che il fulcro si trova esattamente a metà del dondolo (si faccia riferimento alla figura della leva di prima specie), ovvero i bracci delle due forze applicate alla leva sono uguali, Bob deve pesare quanto Alice.

Dato che Alice ha una massa di 40 kg, il suo peso (e quello di Bob) è:

$$P = mg = 40 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 392 \text{ N}$$

3.9.2 | Carrucole

La carrucola è costituita da un disco girevole, attorno al quale scorre una fune, fissato a un sostegno o a un peso da sollevare. Esistono carrucole fisse, mobili, o serie di carrucole (paranco).



1. Le *carrucole fisse* sono equivalenti a leve (§ 3.9.1) in cui il braccio della forza resistente è uguale a quello della forza motrice, entrambi uguali al raggio del disco (caso a in figura). La condizione di equilibrio è $F_m = F_r$.

   Si ha $V = 1 \Rightarrow$ macchina indifferente. Pur non essendo vantaggiosa, la carrucola fissa è utile perché consente di sollevare un corpo esercitando una forza diretta verso il basso.

2. Le *carrucole mobili* hanno un estremo della fune fissato al sostegno, la forza resistente fissata nel centro del disco e la forza motrice all'altro estremo della fune (caso b in figura). Metà resistenza si scarica sul sostegno e quindi l'equilibrio è raggiunto quando $F_m = F_r/2$.

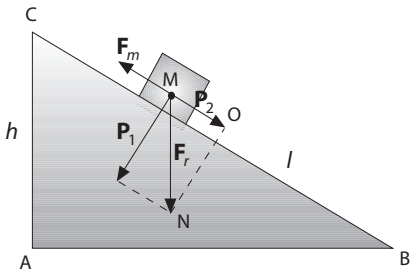
Si ha $V = 2 \Rightarrow$ macchina vantaggiosa.

3. Il *paranco* è una macchina composta da *n* carrucole mobili (caso c in figura); l'equilibrio viene raggiunto quando $F_m = F_r/(2n)$.

Il vantaggio aumenta con l'aumentare di *n*: $V = 2n \Rightarrow$ macchina vantaggiosa.

3.9.3 | Piano inclinato

Si tratta di una macchina formata da un piano di lunghezza *l,* inclinato rispetto all'orizzontale con un dislivello *h,* sul quale viene appoggiato un corpo che si vuole tenere in equilibrio.
Il peso dell'oggetto costituisce la forza resistente $\mathbf{F}_r$. Il metodo più vantaggioso per bilanciare la caduta del corpo è applicare la forza motrice $\mathbf{F}_m$ parallela al piano. Tale forza deve essere uguale e contraria alla componente della forza peso parallela al piano.
Si scompone quindi il peso in $\mathbf{P}_1$ e $\mathbf{P}_2$.
Per l'equilibrio, il modulo di $\mathbf{F}_m$ deve essere uguale a quello di $\mathbf{P}_2$: $F_m = \overline{MO}$.
Dalla similitudine dei triangoli ABC e MNO si ha:



$$\overline{BC} : \overline{MN} = \overline{AC} : \overline{MO}$$

$$\overline{MO} = \overline{MN} \cdot (\overline{AC}/\overline{BC}) \Rightarrow F_m = F_r \cdot (h/l)$$

La componente $\mathbf{P}_1$ della forza peso, ortogonale al piano, è bilanciata da una forza a essa uguale e opposta, detta *reazione vincolare*.

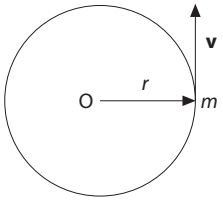
Per il piano inclinato il vantaggio è $V = \frac{l}{h}$. Essendo $l > h$, la macchina è sempre vantaggiosa.

3.10 | Momento angolare

Nel § 3.6 si è definito il momento di una forza rispetto a un punto come il prodotto vettoriale tra il vettore posizione e la forza. Analogamente, per un corpo di massa *m* e velocità **v**, si definisce il *momento angolare* o *momento della quantità di moto* rispetto a un punto O come il prodotto vettoriale tra il vettore posizione del corpo rispetto a O e la sua quantità di moto.

Momento angolare: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{P} = m \cdot \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$

Tale vettore è perpendicolare al piano individuato dal vettore posizione e dal vettore quantità di moto e dipende dal punto O.



Analogamente a quanto accade per la quantità di moto, **il momento angolare di un sistema isolato è un vettore che si conserva**.

Nel caso di moto circolare uniforme, velocità e vettore posizione rispetto al centro della circonferenza sono ortogonali tra loro; il momento angolare assume quindi la forma:

$$L = m \cdot v \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \omega = I \cdot \omega$$

dove ω indica la velocità angolare del corpo e $I = m \cdot r^2$ prende il nome di **momento d'inerzia**. I è un indice dell'inerzia che i corpi offrono a una variazione della loro velocità angolare.

Una pattinatrice sul ghiaccio sta eseguendo una trottola alla velocità angolare ω. Quando vuole aumentare la velocità della trottola avvicina gli arti al proprio asse di rotazione, fino a ridurre il momento di inerzia I della metà. Supponendo che tra i pattini e il ghiaccio ci sia attrito trascurabile, quanto vale la velocità angolare finale della trottola?

Il momento angolare **L** è, per il moto rotatorio, la grandezza analoga alla quantità di moto **P** per il moto traslatorio.

L'assenza di attrito indica che il sistema pattinatrice-ghiaccio è isolato, ovvero non agiscono forze esterne. In questo caso vale il principio di conservazione del momento angolare $L = I \cdot \omega$: segue che è possibile modificare la velocità angolare di un corpo in rotazione semplicemente cambiando il suo momento d'inerzia (I e ω sono infatti inversamente proporzionali).

Numericamente, dato che $I_2 = I_1/2$:

$$L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \cdot \omega_1 = \frac{I_1}{I_1/2} \cdot \omega_1 = 2\omega_1$$

Ancora una volta, si noti dal punto di vista dimensionale la formula risolutiva:

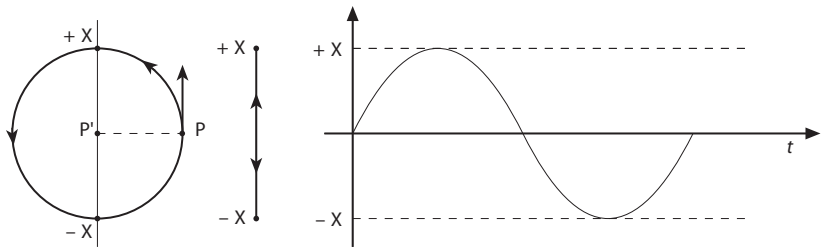
$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \cdot \omega_1$$

dove a sinistra dell'uguale c'è una velocità angolare e a destra, correttamente, lo stesso, dato che il rapporto I_1/I_2 è adimensionale.

L'azione di una forza **F** su un corpo libero ne provoca una variazione della quantità di moto **P**; l'azione di una coppia di momento τ ne provoca una variazione del momento angolare **L**.

3.11 | Forze elastiche e moto armonico

Come si è visto nel § 2.3.5, il moto armonico si può definire come il moto della proiezione P' di un punto P che si muove con velocità angolare costante ω lungo una circonferenza. La legge oraria di tale moto è di tipo sinusoidale.



Quando P compie una rotazione completa (figura a), la sua proiezione P' si muove lungo il diametro della circonferenza (figura b) passando due volte per ogni punto del diametro. La rappresentazione di tale moto è un grafico di tipo sinusoidale (figura c): l'ampiezza x dell'oscillazione varia da – X a + X.

Si tratta di un *moto periodico* di periodo $T = 2\pi/\omega$; ω è la *pulsazione del moto* e si ha:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad T = \frac{1}{\nu}$$

3.11.1 | La molla e il pendolo semplice

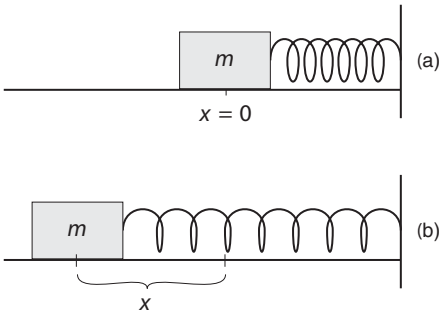
Si prendono ora in esame due casi notevoli di moto armonico: l'oscillazione di un sistema *massa-molla* e l'oscillazione di un *pendolo semplice*.

Nella figura a lato, il **sistema massa-molla** è rappresentato nella configurazione di equilibrio (figura a) e in una configurazione dove la massa è spostata di una quantità *x* dalla posizione di equilibrio (figura b).

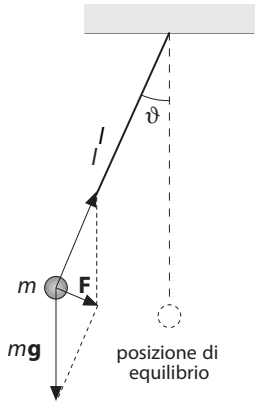
La massa è soggetta alla forza della molla che è una *forza di tipo elastico*, cioè opposta e proporzionale alla deformazione. Tale forza è data da:

$$\mathbf{F} = -k \cdot \mathbf{x}$$

dove **x** è lo spostamento dalla posizione di equilibrio e k è la *costante elastica* della molla.



La massa del **pendolo semplice** (una massa puntiforme *m* sospesa grazie a un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza *l*) è invece sottoposta a due forze: la forza peso pari a *m***g** e la tensione del filo. La risultante di tali forze è indicata con **F** in figura.



In entrambi i casi si tratta di forze di richiamo che, in mancanza di attriti, fanno oscillare le masse senza interruzione.

Sempre in entrambi i casi, quando le masse transitano nelle posizioni di equilibrio ($x = 0$ e $\theta = 0$), le loro velocità risultano massime, mentre si annullano quando l'oscillazione raggiunge la massima ampiezza (*x* e θ massimi). Le accelerazioni, al contrario, raggiungono il loro valore massimo nei punti dove si inverte il moto, cioè dove *x* e θ sono massimi, e si annullano nella posizione di equilibrio.

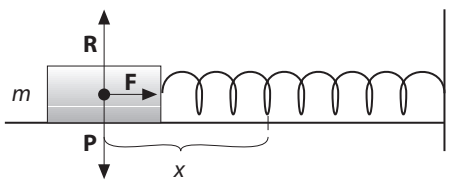
Il periodo di oscillazione del sistema massa–molla è indipendente dall'ampiezza delle oscillazioni; il periodo di oscillazione del pendolo è indipendente dalla massa del corpo appeso al filo e dall'ampiezza delle oscillazioni.

Rispettivamente, si ha:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{e} \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

3.11.2 | Legge oraria del moto armonico

Si consideri il sistema massa-molla in figura. La forza peso **P** che agisce sulla massa *m* è bilanciata dalla reazione vincolare **R** del piano di appoggio. L'unica forza con risultante non nulla che agisce sulla massa è la forza elastica di richiamo $\mathbf{F} = -k \cdot \mathbf{x}$. Tale forza provoca l'accelerazione della massa.



Per la seconda legge della dinamica si ha:

$$m \cdot \mathbf{a} = -k \cdot \mathbf{x} \quad \text{da cui} \quad \mathbf{a} = -\frac{k}{m} \cdot \mathbf{x} \qquad [5]$$

Nel moto armonico l'accelerazione è sempre direttamente proporzionale allo spostamento del corpo rispetto alla posizione di equilibrio.

© Alpha Test

Dalla [5] si ricava la legge oraria del moto armonico.

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi) \qquad \text{dove } \omega = \sqrt{k/m}$$

dove A è l'ampiezza massima dell'oscillazione, φ è un parametro detto *fase iniziale* che tiene conto delle condizioni iniziali e ω prende il nome di pulsazione e ha le dimensioni dell'inverso di un tempo.

Le equazioni trovate assumono la stessa forma per qualunque moto oscillatorio; nel pendolo semplice, l'equazione del moto riferita all'angolo di apertura delle oscillazioni è la seguente:

$$\theta(t) = \Theta \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \varphi) \qquad \text{dove } \omega = \sqrt{g/l}$$

3.11.3 | Grandezze caratteristiche del moto oscillatorio

	massa - molla	pendolo semplice
Costante del moto	k	$\frac{mg}{l}$
Periodo T	$2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$	$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$
Pulsazione $\omega = 2\pi\nu$	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\sqrt{\frac{g}{l}}$
Frequenza ν	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$
Energia potenziale[1]	$\frac{1}{2}kx^2$	mgh

1. L'energia potenziale verrà definita nel § 4.3.2.

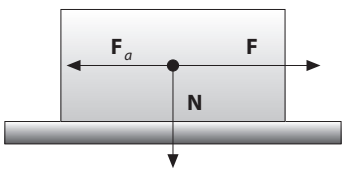
3.12 | Forza di attrito

Le *forze di attrito* si oppongono ai movimenti relativi tra i corpi. La forma di attrito più ricorrente nelle domande dei test universitari è la forza di attrito *radente*.

Dati due corpi mantenuti a contatto da una forza **N** perpendicolare alla superficie di contatto, la forza di **attrito radente $\mathbf{F}_a$** è originata dallo slittamento di un corpo sull'altro ed è un vettore così definito:
Direzione: parallela alla superficie di contatto;
Verso: quello che si oppone al moto relativo tra i due corpi;

Intensità: $|\mathbf{F}_a| = f \cdot |\mathbf{N}|$ dove $f = \begin{cases} f_s: \text{ coefficiente di attrito statico} \\ f_k: \text{ coefficiente di attrito dinamico} \end{cases}$

La forza di attrito radente è quindi direttamente proporzionale alla forza normale **N** (che nel caso in figura coincide con la forza peso del corpo) e dipende dalla natura delle superfici di contatto.
Il coefficiente di attrito statico f_s è proprio della resistenza che si incontra quando si cerca di mettere in movimento un corpo inizialmente fermo.



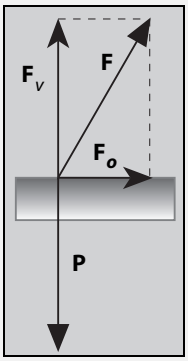
Il coefficiente di attrito dinamico f_k riguarda invece un corpo già in movimento. Si verifica che la resistenza che un corpo incontra è maggiore quando parte da fermo rispetto a quella che incontra quando è già in moto.

Per ogni materiale vale la disuguaglianza: $f_s > f_k$

Oltre alla forza di attrito radente, esistono altri due tipi di forze di attrito.

- **Forza di attrito volvente**: si tratta della forza che si oppone al rotolamento di un corpo su un altro: sperimentalmente si trova che l'attrito volvente è sempre inferiore a quello radente.
- **Forza di attrito nei fluidi**: quando un corpo si muove all'interno di un fluido viscoso (come un pesce nell'acqua o un paracadutista nell'aria) incontra una resistenza che dipende dalla viscosità del fluido (§ 6.5) e dalla forma, dalle dimensioni e dalla velocità del corpo che si muove nel fluido.

Un corpo di massa $m = 2$ kg è appoggiato su un piano orizzontale. Tra il corpo e il piano i coefficienti di attrito statico e dinamico valgono rispettivamente $f_s = 0,5$ e $f_d = 0,3$. Si applica al corpo una forza F di modulo pari a 20 N che forma con il piano un angolo di 60°. Determinare la forza totale agente parallelamente al piano.



La componente verticale della forza **F** vale:

$$F_v = F\text{sen}(60°) = 17,32 \text{ N}$$

mentre quella orizzontale $F_o = F\cos(60°) = 10 \text{ N}$.

La forza di attrito statico vale:

$$F_s = (mg - F_v) \cdot f_s = (2 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 - 17,32 \text{ N}) \cdot 0,5 = 1,14 \text{ N}$$

ed è diretta nel verso opposto alla componente orizzontale $\mathbf{F}_o$.

Essendo $F_s < F_o$, il corpo inizia a muoversi.

Si considera l'attrito dinamico:

$$F_d = (mg - F_v) \cdot f_d = (2 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 - 17,32 \text{ N}) \cdot 0,3 = 0,684 \text{ N}$$

La forza totale parallela al piano è dunque:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_d \quad \Rightarrow \quad R = F_o - F_d = (10 - 0,684) \text{ N} = 9,316 \text{ N}$$

 © Alpha Test

Quesiti svolti

1 **Su un corpo di 100 g agisce solo una forza costante di 10 N. Il moto del corpo è:**

A uniforme con velocità costante di 100 m/s

B uniformemente accelerato con $a = 100$ m/s

C uniformemente accelerato con $a = 100$ m/s^2

D uniformemente accelerato con $a = 0{,}1$ m/s^2

E uniformemente accelerato con $a = 10$ m/s^2

Una forza costante F che agisce su un corpo di massa m non soggetto a vincoli, per il secondo principio della dinamica, imprime al corpo una accelerazione pari a: $a = F/m$.

Sostituendo i valori, si trova: $a = \frac{10\text{ N}}{100\text{ g}} = \frac{10\text{ N}}{0{,}1\text{ kg}} = 100\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Il corpo si muove quindi di moto uniformemente accelerato con $a = 100$ m/s^2 (risposta C). Si noti che nella risposta B l'unità di misura non è quella dell'accelerazione.

2 **In base al primo principio della dinamica, se vengono meno le forze che determinano il moto circolare uniforme di un corpo, questo:**

A permane nel suo stato di moto circolare uniforme

B rallenta il suo moto sino a fermarsi

C cambia il tipo di moto da circolare uniforme a rettilineo uniforme

D assume un moto rettilineo uniformemente accelerato

E assume un moto uniformemente accelerato

Il primo principio della dinamica afferma che un corpo non soggetto a forze mantiene il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme. Il corpo si muove inizialmente di moto circolare uniforme in virtù della presenza di una forza centripeta; se scompare tale forza, il corpo cambia tipo di moto e prosegue con moto rettilineo uniforme lungo la tangente alla traiettoria iniziale. La risposta esatta è la C.

3 **La massa di una persona è 70 kg. Il suo peso è:**

A 70 kg B $70 \cdot 9{,}8$ kg C $70 \cdot 9{,}8$ N D $70/9{,}8$ N E 70 J

Massa e peso sono grandezze fisiche diverse, legate tra loro dalla seconda legge della dinamica: $P = m \cdot 9{,}8$ m/s^2. Nel caso in esame si ha: $P = 70 \cdot 9{,}8$ N (risposta C).

4 **100 cm^3 di acqua pesano approssimativamente:**

A 0,1 kg B 200 g C 10 g D 1 kg E 1 g

Poiché la densità ρ dell'acqua vale circa 1 g/cm^3, si ricava che 100 cm^3 di acqua pesano approssimativamente 100 g ovvero 0,1 kg (risposta A).

5 **Un corpo è appoggiato sopra un piano inclinato avente la base $b = 4$ m. Sapendo che il coefficiente di attrito è 0,75, quale valore massimo può assumere l'altezza h senza che il corpo scivoli verso il basso?**

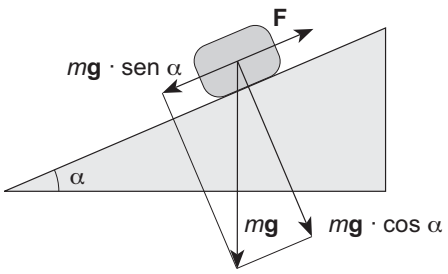
A $h = 5{,}3$ m
B $h = 7{,}5$ m
C $h = 3$ m
D $h = 4{,}75$ m
E $h = 3{,}5$ m

Il modulo della forza di attrito radente $\mathbf{F}_f$ è dato da:

$$|\mathbf{F}_f| = f|\mathbf{N}|$$

dove **N** è la forza *normale* (perpendicolare) alla superficie di contatto e f è il coefficiente di attrito.
Nel caso in esame:

$$F_f = 0{,}75 \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha$$



Per l'equilibrio deve valere l'uguaglianza:

$$3/4\, m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha$$

$$\Rightarrow \quad 3/4 = \text{sen}\,\alpha / \cos\alpha = \text{tg}\,\alpha = h/b \quad \Rightarrow \quad h/b = 3/4 \quad \Rightarrow \quad h = 3$$

La risposta corretta è dunque la **C**.

6 **Un pendolo semplice, composto da una massa sostenuta da un filo, sta oscillando. Quando arriva nel punto più basso si rompe il filo:**

A la massa cade descrivendo un arco di circonferenza
B la massa cade lungo la verticale
C la massa cade descrivendo un arco di parabola
D la massa procede in direzione orizzontale
E la massa si arresta nel punto in cui si è rotto il filo

Quando la massa si stacca dal filo è dotata di una velocità parallela al piano orizzontale; si trova dunque in una condizione equivalente a quella di un proiettile sparato orizzontalmente. La traiettoria della pallina è quindi un arco di parabola (risposta **C**).

7 **Un pendolo è costituito da un punto materiale di massa m sospeso all'estremità libera di un filo avente massa trascurabile e lunghezza L. Da quale delle seguenti grandezze non dipende il periodo delle piccole oscillazioni di tale pendolo?**

A Dalla lunghezza L del filo
B Dall'accelerazione di gravità del luogo
C Dalla massa m
D Non si può rispondere senza conoscere il numero di oscillazioni compiute
E Nessuna delle risposte precedenti è corretta

Il periodo T delle piccole oscillazioni di un pendolo è dato dalla relazione:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{L/g}$$

dove L è la lunghezza del filo e g è l'accelerazione gravitazionale.
Il periodo è quindi indipendente dalla massa m del punto materiale (risposta **C**).

© Alpha Test

8 **Un ascensore si muove con velocità costante verso il basso mentre al suo interno un ragazzo si sta pesando su una comune bilancia (dinamometro). Il peso indicato dalla bilancia è:**

A inferiore al reale
B uguale al reale
C superiore al reale
D inferiore, uguale, superiore a seconda del valore della velocità dell'ascensore
E nessuno dei precedenti

Per mostrare che il peso indicato dalla bilancia è uguale al reale si può ragionare per assurdo. Si supponga cioè che la bilancia indichi un peso diverso dal reale; se così fosse si potrebbe capire, dall'interno dell'ascensore, che il sistema è in movimento e ciò è in contrasto con il principio di relatività galileiana secondo il quale è impossibile, dall'interno di un sistema di riferimento inerziale, capire se questo è fermo o è dotato di moto rettilineo uniforme. La risposta esatta è la **B**.

Per concludere si osserva che la bilancia segna un valore diverso dal reale solo nel momento in cui l'ascensore parte o si ferma, cioè nei momenti in cui l'accelerazione è diversa da zero. In tali casi infatti l'ascensore non è un sistema inerziale.

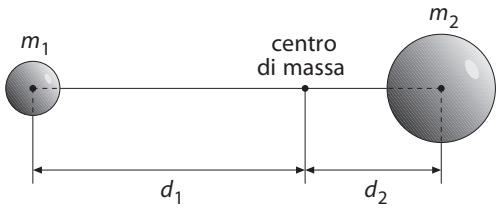
9 **La distanza media Terra-Luna è circa 380.000 km e il raggio della Luna è circa 1750 km (0,27 volte quello della Terra); il rapporto tra la massa della Luna e quella della Terra è 1/81. Quale delle seguenti risposte individua più correttamente la posizione del centro di massa del sistema Terra-Luna?**

A Il centro della Luna
B A mezza via tra la Luna e la Terra
C Il centro della Terra
D All'interno della Terra ma non al centro
E All'interno della Luna ma non al centro

In generale, per determinare la posizione del centro di massa di un sistema composto da due masse m_1 e m_2 (per esempio Terra e Luna), si utilizza la relazione seguente:

$$m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

dove $d_1 + d_2 = d$ è la distanza fra le masse.



Nel caso del sistema Terra-Luna si ha:

$$\frac{m_L}{m_T} = \frac{d_T}{d_L} \Rightarrow \frac{1}{81} = \frac{d_T}{380.000 \text{ km} - d_T} \Rightarrow 82 d_T = 380.000 \text{ km} \Rightarrow d_T = 4650 \text{ km}$$

Dato che il raggio della Terra vale 6400 km > 4650 km, il centro di massa del sistema Terra-Luna si trova lungo la congiungente i rispettivi centri di massa, all'interno della superficie terrestre.

La risposta esatta è quindi la **D**.

10 **Una pallina viene scagliata verticalmente verso l'alto (nel campo gravitazionale) da una molla. Quanto vale l'accelerazione della pallina nell'istante immediatamente successivo al distacco della pallina dalla molla? (Si supponga che la resistenza dell'aria sia trascurabile e che l'accelerazione di gravità sia diretta naturalmente verso il basso e di valore pari a 9,8 m/s^2.)**

A 0

B 9,8 m/s^2

C – 9,8 m/s^2

D Più di 9,8 m/s^2

E Non si può sapere, se non si conosce la forza esercitata dalla molla

Quando la pallina si stacca dalla molla, la sola forza a cui è soggetta è la forza peso. La seconda legge della dinamica ($\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{F}/m$) diventa quindi $a = P/m = mg/m = g = 9{,}8$ m/s^2 dove P è il peso della pallina. La sola accelerazione a cui la pallina è sottoposta è quella di gravità e la risposta esatta è la **C** (il segno è dovuto al fatto che l'accelerazione gravitazionale ha verso opposto rispetto alla velocità).

11 **Per quale motivo un satellite artificiale può girare in orbita attorno alla Terra senza ricadere sulla Terra stessa?**

A Perché è abbastanza distante dalla Terra affinché l'attrazione terrestre non sia più efficace

B Perché la velocità di rotazione del satellite è tale che la forza centripeta è uguale alla forza di attrazione terrestre

C Perché il satellite subisce una uguale attrazione dalla Terra e dalla Luna

D Perché, grazie alla elevata velocità, è sostenuto dall'atmosfera come un aeroplano

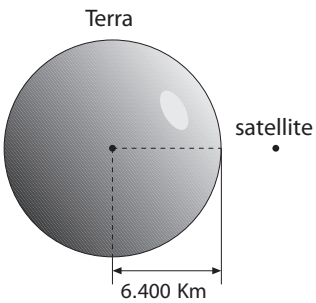
E Nessuna delle precedenti

La maggior parte dei satelliti si trova a poche centinaia di chilometri di distanza dalla superficie terrestre il cui raggio vale circa 6400 chilometri.

I satelliti sono in generale molto più vicini alla Terra di quanto non sia rappresentato nella figura riportata a lato. È dunque evidente che la risposta **A** contiene un'affermazione falsa.

I satelliti sono soggetti alla sola forza gravitazionale (tutt'altro che trascurabile) e sono sottoposti a una accelerazione centripeta (si muovono di moto circolare).

In accordo con la seconda legge della dinamica la forza peso dei satelliti è esattamente la forza centripeta necessaria per garantire la "stabilità" del loro moto di rivoluzione intorno alla Terra: la risposta esatta è la **B**.



12 **Un'asta rettilinea e rigida *AB* è incernierata in *A* ad un punto fisso intorno al quale è libera di ruotare senza attrito ed è mantenuta in posizione orizzontale da un cavo d'acciaio verticale collegato ad essa in *B*. L'asta ha un peso trascurabile ma nel suo punto medio è appoggiato un carico puntiforme. Se si sposta questo carico e lo si colloca più vicino a *B*, a tre quarti dell'asta, come si modifica la tensione nel cavo rispetto alla situazione precedente?**

A Raddoppia

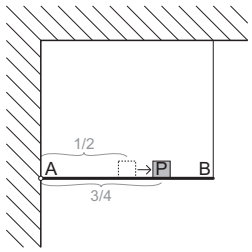
B Aumenta del 15%

C Diminuisce del 25%

D Aumenta del 50%

E Resta inalterata

© Alpha Test



Impostando le equazioni per l'equilibrio, e detta T la tensione sul cavo, l'equazione dei momenti quando il peso P è appoggiato al centro è: $P/2 = T$. Successivamente diventa:

$$\frac{3}{4} \cdot P = T'$$

Poiché il peso P del carico è costante, si può scrivere:

$$\frac{3}{4} \cdot 2T = T' \quad \Rightarrow \quad T' = \frac{3}{2} \cdot T$$ (risposta **D**)

---

13 **Le dimensioni interne di un serbatoio d'acqua a forma di parallelepipedo sono base quadrata di lato 80 cm e altezza di 1,5 m. Quando il serbatoio è pieno per metà qual è la massa di acqua nel serbatoio?**

A 480 kg
B 4800 kg
C 960 kg
D 9600 kg
E 6000 kg

Per calcolare il volume del serbatoio d'acqua bisogna innanzi tutto procedere alla conversione delle unità di misura: 80 cm equivalgono a 0,8 m.

Il volume di metà serbatoio si ricava tramite la formula:

$$V = \frac{l^2 \cdot h}{2} = \frac{0,8 \cdot 0,8 \cdot 1,5}{2} = 0,48 \text{ m}^3$$

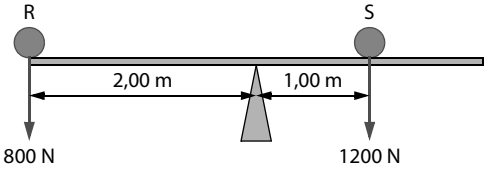
Ricordando che la densità dell'acqua è pari a $1000 \text{ kg} / \text{m}^3$, si ricava la massa presente in metà serbatoio tramite la fomula inversa:

$$m = d \cdot V = 1000 \text{ kg} / \text{m}^3 \cdot 0,48 \text{ m}^3 = 480 \text{ kg}$$

La risposta esatta al quesito è pertanto la **A**.

---

14 **Due bambini, R e S, sono seduti su un'altalena nelle posizioni indicate nel diagramma. L'altalena è lunga 4,00 m, è uniforme e ha il fulcro posto al suo centro. R pesa 800 N mentre S pesa 1200 N. L'altalena non è in equilibrio.**



Uno dei due bambini si muove in modo che l'altalena risulti in equilibrio. Quale tra i seguenti spostamenti porterebbe l'altalena ad essere in equilibrio?

In ognuno degli spostamenti solo un bambino si muove, rimanendo dalla stessa parte del fulcro.

A S si sposta a 0,50 m dal fulcro
B S si sposta a 0,75 m dal fulcro
C S si sposta a 2,00 m dal fulcro
D R si sposta a 1,50 m dal fulcro
E R si sposta a 1,75 m dal fulcro

Dal punto di vista vettoriale, i momenti generati dalle forze peso dei due bambini hanno verso opposto, quindi affinché l'altalena sia in equilibrio occorre che siano uguali i moduli dei due momenti:

$$\text{forza-peso}_R \times \text{braccio}_R = \text{forza-peso}_S \times \text{braccio}_S$$

Inizialmente l'altalena non è in equilibrio:

$$800\ \text{N} \times 2{,}00\ \text{m} \neq 1200\ \text{N} \times 1{,}00\ \text{m}$$

Se R si sposta a 1,50 m dal fulcro (come indicato dall'alternativa **D**) allora l'altalena raggiunge l'equilibrio:

$$800\ \text{N} \times 1{,}50\ \text{m} = 1200\ \text{N} \times 1{,}00\ \text{m}$$

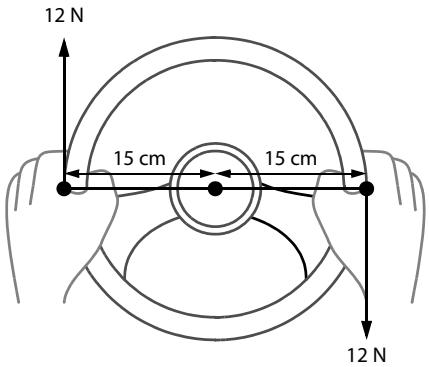
---

15 **Il conducente di un'automobile gira il volante applicando due forze opposte, ognuna di modulo 12 N, con le sue mani. Le mani sono poste sul volante in modo speculare e il raggio esterno del volante è di 15 cm.**

Qual è il momento torcente totale che viene prodotto da questa coppia di forze?

A 0,90 Nm
B 1,80 Nm
C 3,60 Nm
D 7,20 Nm
E 18 Nm

Anche se il testo del quesito non è chiarissimo al riguardo, si assume che le mani del conducente siano poste sul volante non solo "in modo speculare", ma anche in posizione diametralmente opposta rispetto al centro del volante stesso.



In questo caso il momento della coppia di forze è pari al prodotto fra l'intensità di una delle due forze (12 newton) e il braccio della coppia (ossia la distanza fra i due punti di applicazione delle forze, quindi 30 cm):

$$\text{momento} = \text{forza} \times \text{braccio} = 12\ \text{N} \times 0{,}30\ \text{m} = 3{,}60\ \ \text{Nm}$$

La risposta esatta è quindi la **C**.

© Alpha Test

4 Lavoro ed energia

4.1 | Lavoro di una forza

Quando il punto di applicazione di una forza **F** compie uno spostamento **s**, la forza compie un lavoro L dato dal prodotto scalare tra forza e spostamento.

$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{s}| \cdot \cos\alpha$ Dimensioni: $[M]\,[L]^2\,[T]^{-2}$

dove α è l'angolo formato dai vettori **F** e **s**. Unità di misura nel SI: $N \cdot m$ = joule (J)

L'unità di misura del lavoro nel sistema CGS è l'erg (simbolo: erg).
Quanti joule vale un erg?

Si è visto che $1\ J = 1\ N \cdot 1\ m$. Analogamente, nel CGS, $1\ erg = 1\ dyn \cdot 1\ cm$.

Si tratta, per passare da J a erg, di trasformare tutte le unità del SI in unità del CGS mediante equivalenze:

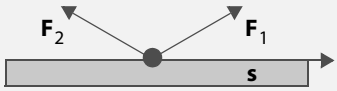
$$1\ J = 1\ N \cdot 1\ m = (10^5\ dyn) \cdot 10^2\ cm = (10^5 \cdot 10^2)\ dyn \cdot cm = 10^7\ erg$$

Si conclude così che $1\ J = 10^7\ erg$ e, viceversa, $1\ erg = 10^{-7}\ J$.

Il lavoro è una grandezza scalare!

Il lavoro compiuto da una forza **F** quando il suo punto di applicazione si sposta non dipende solo dalle intensità della forza e dello spostamento, ma anche dal loro orientamento reciproco nello spazio. Per esempio, il lavoro è positivo o negativo a seconda che l'angolo α formato da **F** e da **s** sia minore o maggiore di 90°.

Una forza F di modulo 10 N viene applicata a un corpo che si sposta verso destra, di 2 m, lungo un piano orizzontale senza attrito. Calcolare il lavoro della forza nel caso in cui essa formi con il piano un angolo di 30° o di 150°.
A parità di forza e spostamento, qual è l'angolo per cui il lavoro è massimo?



Schematizzando il problema come in figura, si scrive, secondo la definizione di lavoro:

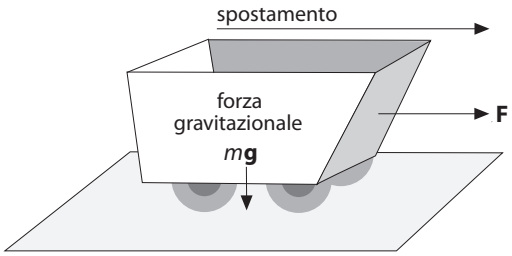
$$L_1 = \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{s} = F_1 \cdot s \cdot \cos 30° = 10\ N \cdot 2\ m \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\ J$$

$$L_2 = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{s} = F_2 \cdot s \cdot \cos 150° = 10\ N \cdot 2\ m \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -10\sqrt{3}\ J$$

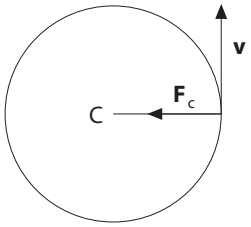
L'angolo per cui è massimo il lavoro è l'angolo per cui è massimo in generale un prodotto scalare: 0°. Ovvero, **il lavoro è massimo quando forza e spostamento sono paralleli**.

Dalla definizione di lavoro, poiché cos(90°) = 0, si ricava che **le forze perpendicolari allo spostamento non compiono lavoro**.

La forza centripeta e la forza gravitazionale sono forze che in alcune circostanze, come quelle sotto raffigurate, non compiono lavoro.



Se il piano di scorrimento del carrello è orizzontale, la forza peso del carrello $m\mathbf{g}$ non compie lavoro, mentre la forza **F** sì.



La forza centripeta $\mathbf{F}_c$ nel moto circolare uniforme è perpendicolare alla velocità e quindi allo spostamento: è una forza che non compie lavoro.

Più in generale il lavoro di una forza è nullo quando vale **almeno una** delle seguenti condizioni:

$$|\mathbf{F}| = 0; \quad |\mathbf{s}| = 0; \quad \mathbf{F} \perp \mathbf{s}$$

4.2 | Potenza

La potenza media di una forza o, più in generale, di una macchina è definita come il rapporto tra il lavoro compiuto dalla forza (o dalla macchina) e il tempo impiegato a produrre il lavoro.

Potenza media: $P_m = \dfrac{L}{\Delta t}$

Dimensioni: $[P] = [M]\,[L]^2\,[T]^{-3}$
Unità di misura nel SI: J/s = watt (W)

La potenza di una forza può essere espressa in funzione della forza e della velocità del suo punto di applicazione attraverso la relazione:

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Che potenza deve erogare una centrale elettrica che alimenta una città con un milione di alloggi, ciascuno dei quali consuma mediamente 1 chilowatt di potenza elettrica?
Per risolvere questo quesito non è necessario conoscere alcuna nozione di elettricità: è sufficiente moltiplicare la potenza media consumata da ciascun alloggio per il numero totale di alloggi. Si ottiene così:

$$P_{tot} = 1\ \text{kW} \cdot 1.000.000 = 10^3\ \text{W} \cdot 10^6 = 10^9\ \text{W} = 1\ \text{GW}$$

Il **chilowattora** è il lavoro compiuto in un'ora da una macchina avente la potenza di 1000 W.

Vale la relazione: $1\ \text{kWh} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{J}$

Il chilowattora misura un lavoro e non una potenza!

Altre unità di misura della potenza (non appartenenti al SI ma largamente utilizzate in campo tecnico) sono il *cavallo vapore* (CV) e il *cavallo vapore britannico* (hp, che sta per *horse power*). Valgono le relazioni:

$$1\ \text{CV} = 75\ \text{kg}_{\text{peso}} \cdot 1\ \text{m/s} = 735{,}499\ \text{W}; \qquad 1\ \text{hp} = 745{,}7\ \text{W}$$

 © Alpha Test

4.3 | Energia meccanica

L'energia meccanica di un corpo è una misura del lavoro meccanico che è stato fatto sul corpo o del lavoro meccanico che il corpo è potenzialmente in grado di produrre. **Lavoro ed energia sono quindi grandezze omogenee**: entrambe si misurano in joule.

L'*energia meccanica* si distingue in:

- **energia cinetica**: energia di movimento che non dipende dalla posizione del corpo;
- **energia potenziale**: energia di posizione che non dipende dallo stato di moto del corpo.

4.3.1 | Energia cinetica

Dato un corpo di massa m che si muove alla velocità **v**, la sua energia cinetica E_k vale:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

L'energia cinetica, come ogni forma di energia, si misura in joule.

Quanto vale l'energia cinetica finale di un grave di massa $m = 1$ g lasciato cadere da un'altezza $h = 2$ m ?

Si ricorda che, in assenza di attriti, la velocità finale del grave vale $v = \sqrt{2gh}$.

Dalla definizione di energia cinetica:

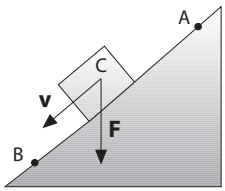
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\sqrt{2gh})^2 = \frac{1}{2}m \cdot 2gh = mgh = 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2\ \text{m} = 0{,}0196\ \text{J}$$

Volendo esprimere il risultato in notazione esponenziale $0{,}0196\ \text{J} = 1{,}96 \cdot 10^{-2}\ \text{J}$.

Teorema dell'energia cinetica

Dato un corpo C soggetto alla sola forza **F**, il lavoro compiuto da **F** quando C si sposta da un punto A a un punto B è uguale alla variazione dell'energia cinetica ΔE_k del corpo C.

$$\Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} = L_{A \to B}$$

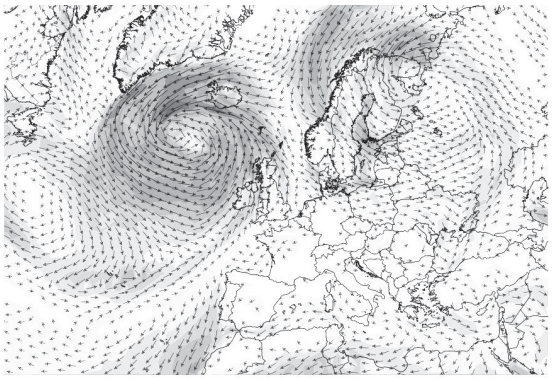


4.3.2 | Energia potenziale

Per definire l'energia potenziale di un corpo è necessario introdurre i concetti di *campo vettoriale* e di *campo conservativo*.

Campo vettoriale: regione di spazio a ogni punto della quale è possibile associare un vettore che caratterizza il campo in quel punto.

Per esempio ad ogni punto della superficie terrestre è possibile associare direzione, verso e intensità (ossia velocità) del vento in quel punto, tramite la cosiddetta *mappa dei venti*..



Il **campo gravitazionale** è un campo vettoriale, dato che a ogni punto si può associare il vettore che rappresenta la forza gravitazionale che agisce su una massa posta in quel punto.

Il campo gravitazionale può essere visto anche come un *campo di forze*.

Campo conservativo: campo di forze nel quale il lavoro delle forze del campo è una funzione di stato, cioè non dipende dal cammino seguito dal punto di applicazione della forza, ma solo dalle sue posizioni iniziale e finale.

In un campo conservativo il lavoro delle forze del campo lungo una *traiettoria chiusa* è sempre nullo.

A questo punto è possibile definire l'energia potenziale.

L'**energia potenziale** E_p di un corpo immerso in un campo di forze conservativo è una funzione della posizione del corpo, tale che **la differenza fra i suoi valori nelle posizioni iniziale A e finale B è uguale al lavoro compiuto sul corpo dalle forze del campo per spostarlo dalla posizione A alla posizione B**:

$$L_{A \to B} = E_{p_A} - E_{p_B} = -(E_{p_B} - E_{p_A}) = -\Delta E_p \qquad [6]$$

Allo stesso modo, si può affermare che il lavoro che bisogna compiere per vincere le forze del campo (cioè *contro le forze del campo*) portando un corpo dal punto A al punto B è pari alla variazione dell'energia potenziale ΔE_p del corpo tra A e B.

Si noti il **cambiamento di segno**:
Lavoro compiuto dalle forze del campo:

$$L_{A \to B} = -\Delta E_p$$

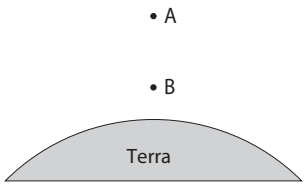
Lavoro compiuto dalle forze esterne *contro* le forze del campo:

$$L_{A \to B} = \Delta E_p$$

L'energia potenziale è definibile solo per campi conservativi.

Il campo gravitazionale è conservativo: il lavoro che le forze del campo compiono per portare un corpo di massa *m* dal punto A al punto B non dipende dal cammino seguito.
Si può quindi calcolare il lavoro lungo il segmento $\overline{AB}$:

$$L_{A \to B} = \mathbf{F}_{gravitazionale} \cdot \mathbf{AB} = F \cdot \overline{AB} = F(h_A - h_B)$$
$$= mg \cdot (h_A - h_B) = mgh_A - mgh_B = -\Delta(mgh) = -\Delta E_P$$



Si ricava quindi che l'**energia potenziale gravitazionale** vale:

$$E_p = m \cdot g \cdot h$$

L'energia potenziale gravitazionale di un corpo di massa *m* è direttamente proporzionale a *m* ed esprime fisicamente la quantità di lavoro meccanico che la forza gravitazionale compie sul corpo quando questo viene lasciato cadere liberamente nel campo.

Si dimostra che l'**energia potenziale elastica** di una molla di costante elastica k che ha subito un allungamento *x* vale:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

Si calcoli l'energia potenziale di un punto materiale di massa $m = 1$ kg vincolato a una molla, acquistata in un'oscillazione di ampiezza $x = A$, sapendo che il periodo dell'oscillazione vale $T = 10$ s.
La conoscenza del periodo e della relazione che lo lega alla costante elastica *k* permette di trovare l'energia potenziale richiesta:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow k = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot m = \frac{4\pi^2}{100\ s^2} \cdot 1\ kg \cong 0{,}4\frac{kg}{s^2} \rightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2 \cong 0{,}2 \cdot A^2$$

 © Alpha Test

4.3.3 | Conservazione dell'energia meccanica totale

L'energia meccanica totale E_{tot} (ossia la somma di energia cinetica e di energia potenziale) di un corpo posto in un **campo conservativo** e soggetto alle sole forze del campo è costante:

$$E_{tot} = E_k + E_p = \text{costante}$$

Si consideri un corpo in caduta libera: via via che il corpo cade, la sua energia potenziale diminuisce (*h* diminuisce) e si trasforma in energia cinetica (*v* aumenta); in tal modo la loro somma rimane costante durante tutta la caduta.

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{costante}$$

Quando il corpo tocca il terreno intervengono forze non conservative in presenza delle quali non si applica il principio di conservazione dell'energia meccanica totale.

In un campo non conservativo l'energia meccanica totale non si conserva. Parte di essa si può per esempio trasformare in energia termica.

La forza di attrito radente (§ 3.12) è una forza il cui lavoro *dipende* dal cammino seguito dal suo punto di applicazione. Si tratta quindi di una forza non conservativa.
In presenza di attriti non si è più in un campo di forze conservativo: cade dunque il principio di conservazione dell'energia meccanica totale.

Quanto vale la velocità finale di un punto materiale che scivola da una quota *h* lungo un piano inclinato senza attrito che forma un angolo α con l'orizzontale?

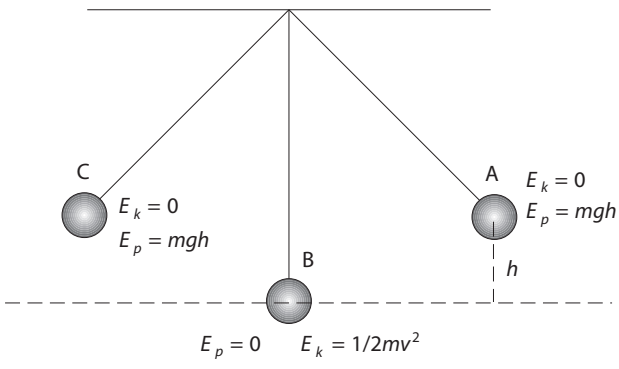
La conservazione dell'energia meccanica rende la soluzione di questo esercizio molto semplice: basta osservare che *tutta* l'energia potenziale iniziale alla sommità del piano inclinato, mgh, si trasforma in energia cinetica alla base del piano. Perciò:

$$E_{k\,\text{fin}} = \frac{1}{2}mv_{\text{fin}}^2 = E_{p\,\text{iniz}} = mgh \quad \Rightarrow \quad v_{\text{fin}} = \sqrt{2 \cdot mgh / m} = \sqrt{2hg}$$

La velocità finale non dipende dalla massa (come si era visto nel § 2.3.3 per il moto di caduta libera) né dall'angolo α, ma soltanto dalla quota iniziale.

4.3.4 | Applicazione: moto del pendolo

Si consideri il pendolo semplice in figura. Nel punto di partenza A, il corpo è fermo, l'energia cinetica è nulla e l'energia potenziale è pari a $m \cdot g \cdot h$.



Quando il pendolo viene lasciato, durante la discesa, l'energia potenziale diminuisce trasformandosi in energia cinetica. Nel punto B il pendolo possiede solo energia cinetica, il cui valore è pari a quello dell'energia potenziale posseduta in A (principio di conservazione dell'energia).
Nella fase di risalita da B a C, l'energia cinetica del pendolo diminuisce a favore dell'energia potenziale. Nel punto finale C, l'energia cinetica è nuovamente nulla, quella potenziale è massima e ha un valore pari a quello che aveva in A. Poiché d'altra parte l'energia potenziale è pari a $m \cdot g \cdot h$, si deduce che sia in A che in C il corpo raggiunge la stessa altezza.

4.4 | Urti

Si parla di **urto** quando due (o più) particelle collidono (per esempio: urto tra due palle da biliardo) oppure quando interagiscono a distanza ravvicinata (per esempio: cariche elettriche o particelle alfa).

Studiando microscopicamente una collisione tra due corpi, si possono presentare due casi:

1. dopo l'urto, i due corpi hanno ancora la stessa forma e la stessa temperatura. Si tratta di corpi elastici e l'urto prende il nome di **urto elastico**;
2. nell'urto i due corpi hanno subito delle variazioni nella struttura, nella forma o nella temperatura interna; si parla in questo caso di **urto anelastico**. In particolare se i due corpi rimangono uniti, l'urto si dice **perfettamente anelastico**.

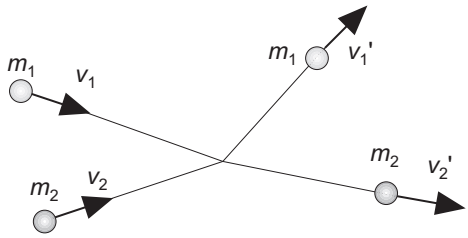
Il sistema costituito dalle particelle che si urtano può essere considerato con buona approssimazione un sistema isolato. In ogni tipo di urto, elastico o anelastico, vale quindi il principio di **conservazione della quantità di moto**:

$$\sum \mathbf{P}_i = \sum \mathbf{P'}_i \qquad [7]$$

dove $\mathbf{P}_i$ e $\mathbf{P'}_i$ sono le quantità di moto della *i*-esima particella prima e dopo l'urto.

Si tratta di una relazione vettoriale, con la quale è possibile stabilire le velocità delle particelle dopo l'urto partendo dalle velocità prima dell'urto o viceversa. Per utilizzarla in maniera corretta, è necessario fissare degli assi di riferimento e scomporre sugli assi i vettori quantità di moto.

Nella figura sottostante si rappresenta schematicamente l'urto fra due particelle di massa m_1 e m_2; l'apice indica le grandezze dopo l'urto.



Nel caso di un urto tra due particelle, la [7] diventa:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v'}_1 + m_2\mathbf{v'}_2$$

Negli urti elastici l'energia cinetica si conserva. Negli urti anelastici le deformazioni e il riscaldamento sono provocati da forze dissipative, e l'energia cinetica non si conserva.

L'energia cinetica si conserva solo negli urti elastici, mentre la quantità di moto si conserva in ogni urto.

 © Alpha Test

Quesiti svolti

1 **Il lavoro meccanico è:**

A il prodotto della forza per l'accelerazione
B il vettore ottenuto dal prodotto della forza per lo spostamento
C il prodotto della forza per lo spostamento quando la forza è costante e lo spostamento è rettilineo e parallelo alla forza
D l'energia posseduta dal corpo
E la potenza diviso il tempo

Per definizione, il lavoro di una forza è una grandezza scalare data dal prodotto scalare tra la forza stessa e lo spostamento che compie il suo punto di applicazione. Se i vettori forza e spostamento sono paralleli tra loro, l'angolo tra i due è nullo e il prodotto scalare diventa il prodotto tra i moduli della forza e dello spostamento. La risposta esatta è quindi la **C**.

2 **Se si trasporta una valigia con velocità costante mantenendola a una distanza costante da Terra, il lavoro compiuto è:**

A nullo
B proporzionale alla distanza percorsa
C proporzionale al peso della valigia
D proporzionale alla massa della persona che trasporta la valigia
E non è possibile determinarlo sulla base delle informazioni fornite

La forza che si deve esercitare su una valigia per trasportarla a velocità e quota costante è uguale e opposta al peso della valigia stessa. La forza esercitata è dunque perpendicolare allo spostamento della valigia e non compie lavoro (risposta **A**).
Si noti che spesso, nei quesiti di fisica, per rispondere correttamente è necessario abbandonare il senso comune. Nella formulazione del quesito ora commentato, per esempio, è chiara l'intenzione di deviare il candidato verso una delle risposte che contemplano un lavoro diverso da zero. A tale scopo si fa leva sul fatto che ogni persona associa al trasporto di una valigia una situazione di fatica e quindi di produzione di lavoro.

3 **Due punti materiali A e B hanno la stessa quantità di moto. Se la velocità di A è pari a due volte la velocità di B, quale delle seguenti relazioni è valida tra le corrispondenti energie cinetiche K_A e K_B?**

A $2K_A = K_B$
B $K_A = 2K_B$
C $K_A = 4K_B$
D $K_A = K_B$
E $4K_A = K_B$

La quantità di moto di un corpo di massa m che si muove con velocità v è pari a $m \cdot v$.

Poiché i due corpi hanno la stessa quantità di moto e $v_A = 2v_B$, tra le massa vale la relazione:

$$m_A \cdot v_A = m_B \cdot v_B \quad \Rightarrow \quad m_A \cdot 2v_B = m_B \cdot v_B \quad \Rightarrow \quad 2m_A = m_B \quad \Rightarrow \quad m_A = \frac{m_B}{2}$$

Di conseguenza, per le energie cinetiche si ha:

$$K_A = \frac{1}{2} m_A \cdot v_A^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_B}{2} \cdot (2v_B)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_B}{2} \cdot 4v_B^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} m_B \cdot v_B^2 = 2K_B$$

La risposta esatta è la **B**.

---

4 **Una lampadina da 100 W e un ferro da stiro da 1 kW possono consumare la stessa energia?**

A Sì, quando sono alimentati in serie

B Sì, se funzionano per tempi uguali

C Sì, se funzionano per tempi inversamente proporzionali alle rispettive potenze

D Sì, se funzionano per tempi direttamente proporzionali alle rispettive potenze

E No, in nessun caso

A parità di tempo il ferro da stiro consuma una quantità di energia dieci volte superiore a quella consumata dalla lampadina. Se però la lampadina rimane accesa per un tempo dieci volte più lungo, l'energia che consuma è la stessa di quella consumata dal ferro da stiro. La risposta esatta è quindi la **C**.

---

5 **Il kWh (chilowattora) è un'unità di misura di quale grandezza fisica?**

A Della forza elettromotrice (o tensione elettrica)

B Dell'energia

C Dell'intensità della corrente elettrica

D Della potenza

E Della quantità di moto

La risposta corretta è la **B**.

---

6 **Quale delle seguenti espressioni è dimensionalmente corretta? (F = forza, E = energia, W = potenza, v = velocità, L = lunghezza, t = tempo, m = massa)**

A $W = F\,L\,t$

B $v = F/m$

C $F = v\,t$

D $F = E/L$

E $m = F\,t$

Per risalire alla relazione corretta è utile scrivere le dimensioni di forza, energia, potenza e velocità:

$$F = m \cdot \frac{L}{t^2}; \quad E = m \cdot \frac{L^2}{t^2}; \quad W = m \cdot \frac{L^2}{t^3}; \quad v = \frac{L}{t}$$

Sostituendo queste espressioni nelle uguaglianze delle risposte proposte, si vede che l'unica relazione dimensionalmente corretta è la **D**.

© Alpha Test

7 **Una sfera dalla massa di 2 kg si muove di moto rettilineo su una superficie liscia e piana a una velocità di 5 m/s. Essa urta contro una superficie verticale e rimbalza indietro nella stessa direzione a una velocità di 3 m/s.**

Calcolare la variazione di quantità di moto della sfera (dovuta all'urto).

A 2 kg · m / s

B 4 kg · m / s

C 8 kg · m / s

D 16 kg · m / s

E 32 kg · m / s

Scegliamo come sistema di riferimento un asse orizzontale centrato nel punto di contatto tra la sfera e la superficie verticale e avente verso positivo rivolto nella direzione lungo la quale rimbalza la massa.

La sfera, a causa dell'urto, subisce una variazione della quantità di moto pari a:

$$\Delta P = mv_f - mv_i = 2\ \text{kg} \cdot 3\ \text{m/s} - 2\ \text{kg} \cdot (-5\ \text{m/s}) = 16\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

La risposta corretta è quindi la **D**.

8 **Un corpo di massa 1000 g si trova a 100 cm dal suolo. La sua energia potenziale rispetto al suolo è di:**

A 490 joule

B 980 watt

C 9,8 joule

D 9800 joule

E 980 joule

L'energia potenziale gravitazionale di un corpo di massa m che si trova a un'altezza h vale: $E_p = m \cdot g \cdot h$. Occorre prestare attenzione alle unità di misura: le masse devono essere espresse in chilogrammi e le altezze in metri:

$$E_p = m \cdot g \cdot h = 1\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 1\ \text{m} = 9{,}8\ \text{J}$$

La risposta esatta è la **C**.

9 **Un corpo rigido è mantenuto fermo da opportuni vincoli. Al corpo viene applicata una forza *F* che cresce costantemente per 10 secondi passando da 10 N a 20 N. In tale intervallo di tempo il lavoro compiuto dalla forza è:**

A 10 J

B 15 J

C zero

D 10 N · s

E 15 N · s

Per la risoluzione di questo, come di altri esercizi presenti nel test ufficiale, è determinante l'attenta lettura del testo.

Dato che il corpo è «mantenuto fermo da opportuni vincoli» non si può spostare e, senza spostamento, non si ha lavoro: la risposta esatta è la **C**.

10 **Un corpo, che inizialmente si trova fermo a quota *h* dal suolo e possiede energia potenziale pari a 100 J, viene lasciato cadere liberamente. Trascurando l'attrito dell'aria, l'energia meccanica totale del corpo a quota *h*/2 risulta:**

- **A** uguale a 100 joule
- **B** non si può rispondere perché non si conosce la velocità del corpo a quota *h*/2
- **C** minore di 100 joule
- **D** maggiore di 100 joule
- **E** non si può rispondere perché non è data la massa del corpo

Ciò che viene chiesto è il valore dell'energia meccanica totale del corpo (energia potenziale + energia cinetica) e non la sola energia potenziale.

La caduta di un grave è caratterizzata dalla conservazione della sua energia meccanica totale, in quanto il campo gravitazionale è un campo conservativo: la risposta cercata è la **A**.

11 **L'energia necessaria per imprimere la velocità di 10 m/s a un corpo inizialmente fermo di massa pari a 10 kg è pari a:**

- **A** 500 watt
- **B** 50 joule
- **C** 250 watt
- **D** 100 N · m/s
- **E** 500 joule

Il teorema dell'energia cinetica afferma che il lavoro fatto dalle forze che agiscono su un corpo è pari alla variazione dell'energia cinetica del corpo stesso. Nel caso in esame, l'energia cinetica acquistata dal corpo vale:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 10\ \text{kg} \cdot 100\ (\text{m}^2/\text{s}^2) = 500\ \text{J}$$

La risposta cercata è dunque la **E**.

12 **Un satellite gira sulla sua orbita intorno alla Terra. Il lavoro che la forza di gravità compie sul satellite in un'orbita completa è:**

- **A** positivo
- **B** negativo
- **C** nullo
- **D** positivo o negativo a seconda che l'orbita sia circolare ovvero ellittica
- **E** infinito

La forza gravitazionale è conservativa: per definizione, il lavoro compiuto da tale forza su un cammino chiuso (quale quello di un satellite che dopo un'orbita completa torna al punto si partenza) è nullo. La risposta esatta è la **C**.

© Alpha Test

5 Stati di aggregazione

Gli stati di aggregazione della materia in natura sono tre: **aeriforme**, **liquido** e **solido**.

- **Aeriforme**: non ha né volume né forma propri e dunque si distribuisce uniformemente in tutto il volume a disposizione (si distingue il *gas*, che non può liquefare, dal *vapore*, che se compresso sufficientemente, liquefa; in proposito si veda anche il § 2).
- **Liquido**: ha volume proprio, ma assume la forma del recipiente che lo contiene.
- **Solido**: ha volume e forma propri.

Nei precedenti capitoli si è trattata la meccanica dei corpi solidi; ora si prendono in esame i liquidi e gli aeriformi, che sotto alcuni aspetti hanno comportamenti ben differenti dalla materia solida.

Per fluido si intende un liquido o un aeriforme. Si dice *perfetto* o *ideale* un fluido la cui viscosità (attrito interno) è nulla. In caso contrario il fluido si dice *reale*.

Le leggi della meccanica dei fluidi sono valide indifferentemente per liquidi e aeriformi, con l'unica particolarità che nei liquidi, contrariamente a quanto accade per gli aeriformi, le molecole sono condizionate dalle forze di coesione intermolecolare che le tengono le une vicine alle altre e permettono al liquido di occupare un volume proprio: un aeriforme può essere facilmente compresso, mentre il liquido oppone molta resistenza alla compressione. Si può concludere che:

- un **liquido perfetto** è incomprimibile e non viscoso;
- un **aeriforme perfetto** è comprimibile, perfettamente elastico e non viscoso.

5.1 | Funzioni di stato

Le grandezze *pressione*, *volume* e *temperatura* di un fluido prendono il nome di *funzioni di stato* in quanto determinano lo *stato termodinamico* del fluido.

Le funzioni di stato, o variabili di stato, si distinguono in **estensive** (come il volume e il numero di moli), che sono additive e dipendono dalle dimensioni del sistema, e **intensive** (come la temperatura e la pressione), che non sono additive e non dipendono dalle dimensioni del sistema).

5.1.1 | Pressione

La pressione di una forza su una superficie è definita come il rapporto tra il modulo della componente della forza perpendicolare alla superficie (detta componente *normale*, F_n) e l'area della superficie stessa.

Pressione: $P = \frac{F_n}{S}$ Dimensioni:$[P] = [M]\,[L]^{-1}\,[T]^{-2}$
Unità di misura nel SI:$Pa = N \cdot m^{-2}$

Qui di seguito si cerca di fare ordine tra le numerose unità di misura della pressione:

- la pressione atmosferica a livello del mare (alla temperatura di 0 °C) è pari alla pressione esercitata da una colonna di mercurio alta 760 mm e vale 1 **atmosfera** (atm);
- il **millimetro di mercurio** (mmHg) o **torricelli** (torr) è l'unità di misura usata per la pressione sanguigna;
- nel CGS si definisce come unità di misura per la pressione la **baria** (barie), ma è molto usato anche un suo multiplo, il **bar**, che vale 10^6 barie .

Valgono le equivalenze:

$$1\ \text{atm} = 760\ \text{mmHg} = 1{,}01325\ \text{bar} = 101.325\ \text{Pa} \approx 10^5\ \text{Pa} = 10^5\ \text{N}/\text{m}^2$$

Quanti pascal vale una baria?

Si è visto che $1\ \text{Pa} = 1\ \text{N}/1\ \text{m}^2$. Analogamente, nel CGS, $1\ \text{baria} = 1\ \text{dyn}/1\ \text{cm}^2$.
Si tratta, per passare da Pa a barie, di trasformare tutte le unità del SI in unità del CGS mediante equivalenze:

$$1\ \text{Pa} = \frac{1\ \text{N}}{1\ \text{m}^2} = \frac{10^5\ \text{dyn}}{10^4\ \text{cm}^2} = \left(\frac{10^5}{10^4}\right)\frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} = 10\ \text{barie}$$

Si conclude così che $1\ \text{Pa} = 10\ \text{barie}$ e naturalmente, viceversa, $1\ \text{barie} = 10^{-1}\ \text{Pa}$.

5.1.2 | Volume

Il volume occupato da un sistema si misura in metri cubi oppure in litri e si ha:

$$\text{un litro} = 1\ \text{l} = 1\ \text{dm}^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3$$

Un gas è contenuto in un recipiente cubico di 100 cm di lato. Quanti litri di gas contiene il recipiente?

Il volume del recipiente è:

$$V = l^3 = 100^3\ \text{cm}^3 = 100^3 \cdot (10^{-2})^3\ \text{m}^3 = 10^6 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^3 = 1\ \text{m}^3$$

Per passare ai litri si inverte la relazione vista sopra: $V = 1\ \text{m}^3 = 10^3\ \text{l}$.

5.1.3 | Temperatura

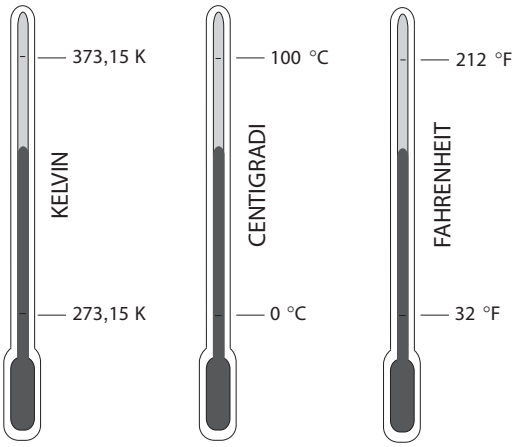
La temperatura di un corpo ne esprime lo *stato termico* ed è un indice della tendenza del calore ad abbandonare il corpo.

Esistono diverse scale termometriche:

- *scala centigrada* o *Celsius*
- *scala Fahrenheit*
- *scala assoluta o Kelvin*

La prima prende come punti di riferimento la fusione del ghiaccio e l'ebollizione dell'acqua alla pressione di 1 atm: si tratta di una **scala convenzionale**.

La scala Fahrenheit segna come 0 °F la temperatura più bassa raggiungibile con una miscela ghiaccio-cloruro di ammonio (corrispondente a circa –18 °C) e come 100 °F la temperatura media del corpo umano.



La scala assoluta (la cui unità di misura è il **kelvin**) è definita in base alla teoria cinetica dei gas (§ 5.3.2) e ad alcune leggi della fisica come l'equazione di stato dei gas ideali: a differenza delle scale Celsius e Fahrenheit è una **scala assoluta**.

Lo zero kelvin rappresenta il limite inferiore delle temperature raggiungibili in natura.
Non esistono temperature kelvin negative.

Se la differenza tra le temperature di due corpi è di 1 °C, questa è anche di 1 K: un grado centigrado è identico a un kelvin: le due scale sono solo *traslate* l'una rispetto all'altra di 273,15 gradi.

© Alpha Test

Per passare da una scala termometrica all'altra si utilizzano le seguenti relazioni:

$$T_F = 9/5\, T_C + 32 \qquad T_K = T_C + 273{,}15 \qquad T_F = 9/5\, T_K - 459{,}6$$

È abbastanza comune trascurare i decimali nel passaggio da °C a K.

Quale differenza di temperatura assoluta corrisponde a quella segnata da un termometro tarato su una scala Celsius, dove la colonnina di mercurio arriva da 25 °C a 27 °C?
Si calcola la variazione di temperatura nella scala Celsius:

$$\Delta T = T_f - T_i = (27 - 25)\ °C = 2\ °C$$

Si trasformano le due temperature in temperature assolute (espresse cioè in kelvin) e poi si ricalcola la variazione:

$$T_f = (27 + 273)\ K = 300\ K\,; \quad T_i = (25 + 273)\ K = 298\ K$$

$$\Delta T = T_f - T_i = (300 - 298)\ K = 2\ K$$

La variazione di temperatura, espressa in °C o K, ha lo stesso valore. Questo perché il grado celsius e il kelvin hanno la stessa ampiezza.

Gli strumenti utilizzati per misurare la temperatura sono i *termometri*: un esempio è costituito da un capillare di vetro con all'interno un liquido, di solito mercurio che, se scaldato, si dilata rendendo "visibile" ogni variazione della temperatura. Questo strumento sfrutta la tendenza di tutti i materiali a cambiare il proprio volume a seconda della temperatura.

5.1.4 | Dilatazione termica

In genere il volume di un corpo solido, liquido o aeriforme aumenta con l'aumentare della temperatura. Questo fenomeno prende il nome di *dilatazione termica* ed è una proprietà comune alla stragrande maggioranza dei materiali. Si ha una dipendenza lineare tra il volume della sostanza e la temperatura, data dalla legge:

$$V_t = V_0 \cdot (1 + k \cdot t) \qquad \text{dove} \begin{cases} t \text{ è la temperatura misurata in °C} \\ V_t \text{ è il volume del corpo alla temperatura } t \\ V_0 \text{ è il volume del corpo alla temperatura di 0 °C} \\ k \text{ è il coefficiente di dilatazione termica del materiale} \end{cases}$$

Il **coefficiente di dilatazione termica** k dipende dal materiale e dal suo stato di aggregazione. I suoi valori sono tabulati e li si suppone costanti al variare della temperatura.

In modo analogo si definiscono i coefficienti di dilatazione lineare e superficiale, γ e β:

$$L_t = L_0 \cdot (1 + \gamma \cdot t) \qquad \text{dove } L \text{ indica la lunghezza del corpo}$$

$$S_f = S_0 \cdot (1 + \beta \cdot t) \qquad \text{dove } S \text{ indica la superficie del corpo}$$

Un binario di ferro è lungo 5 m a 0 °C. Sapendo che il coefficiente di dilatazione lineare del ferro è pari a $12 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$, quale sarà il suo allungamento se la temperatura sale di 50 °C?
L'allungamento è dato da:

$$L_t - L_0 = L_0 \cdot (1 + \gamma \cdot t) - L_0 = L_0 \cdot \gamma \cdot t = 5\ m \cdot 12 \cdot 10^{-6} \frac{1}{°C} \cdot 50\ °C = 3\ mm$$

Questo è il motivo per cui, lungo i binari, vi sono numerose e periodiche interruzioni che consentono al ferro di dilatarsi senza conseguenze negative.

Anche per gli aeriformi vale l'espressione $V_t = V_0 \cdot (1 + k \cdot t)$, con la particolarità che k diventa costante per qualunque tipo di gas. Il suo valore, trovato sperimentalmente, è:

$$k = \alpha = \frac{1}{273{,}15}\,°C^{-1}$$

Non è un caso che il suo denominatore sia uguale in valore assoluto allo zero kelvin; anzi è proprio da queste considerazioni sperimentali che Lord Kelvin fissò la sua scala.

Come cambia la formula della dilatazione termica per un gas, se la temperatura viene espressa in kelvin anziché in gradi celsius?

Anzitutto si osserva che per passare dalla temperatura espressa in gradi centrigradi (che qui si indica con t) a quella espressa in kelvin (qui indicata con T) si usa l'espressione:

$$T = t + 273{,}15 = t + \alpha^{-1} \quad \Rightarrow \quad t = T - 273{,}15 = T - \alpha^{-1}$$

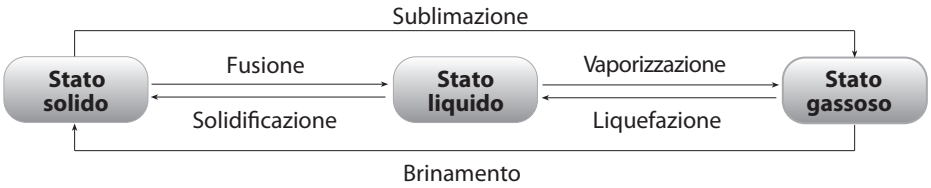
Si può verificare adesso come varia la formula per la dilatazione:

$$V_t = V_0 \cdot [1 + \alpha \cdot t] = V_0 \cdot [1 + \alpha \cdot (T - \alpha^{-1})] = \alpha T V_0$$

Per tutti i gas vale quindi la **legge di Charles**: il volume finale di un gas è proporzionale alla temperatura finale (se la temperatura è espressa in kelvin).

5.2 | Passaggi di stato

Fornendo o sottraendo calore a una sostanza è possibile portarla a un diverso stato di aggregazione. Queste trasformazioni sono dette **cambiamenti di stato** o **passaggi di stato**. Nella figura seguente sono riportati tutti i possibili passaggi.



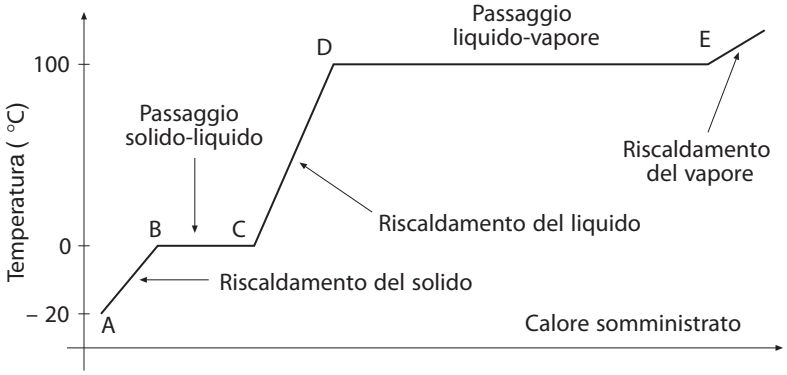
Nelle trasformazioni da sinistra a destra (→) occorre fornire energia al sistema, mentre in quelle da destra a sinistra (←) il sistema dà energia all'esterno.

La liquefazione viene anche detta condensazione, mentre la vaporizzazione si divide in evaporazione ed ebollizione (si veda più avanti il § 5.4.1).

- Ogni passaggio di stato è caratterizzato dalla **rottura o dalla formazione di legami chimici**.
- Durante il cambiamento di stato, **la temperatura del sistema si mantiene costante**.
- Ogni sostanza per cambiare il suo stato ha bisogno di una ben precisa quantità di calore per unità di massa, detta **calore latente** del cambiamento di stato.

Il calore acquistato o ceduto a una massa m di una sostanza affinché questa cambi il suo stato di aggregazione è pari a $Q = m \cdot \lambda$, dove λ è il calore latente del cambiamento, espresso in calorie/grammi (per la definizione di caloria, si veda il § 7.1).

Nel grafico seguente viene analizzato il **riscaldamento di una mole di acqua** (a pressione atmosferica $P = P_0$) da $T = -20$ °C a $T > 100$ °C (per la definizione di mole si veda la sezione di Chimica).



La lunghezza del tratto BC corrisponde al **calore latente molare di fusione** λ_f: energia necessaria per fondere una mole di acqua. La lunghezza del tratto DE corrisponde al **calore latente molare di evaporazione** λ_e: energia necessaria per far evaporare una mole di acqua. Si ha:

$$\lambda_e > \lambda_f \quad \leftrightarrow \quad \overline{DE} > \overline{BC}$$

Il calore latente di fusione dell'acqua vale $\lambda_f = 79{,}7 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$.
Il calore latente di evaporazione dell'acqua vale $\lambda_e = 540 \text{ cal} \cdot \text{g}^{-1}$.

Quanto calore è necessario fornire a 1 kg di ghiaccio perché possa sciogliersi?
Conoscendo il calore latente di fusione del ghiaccio, si deve usare l'espressione $Q = m \cdot \lambda$, avendo cura di trasformare la massa in grammi, dato che $\lambda_f = 79{,}7 \text{ cal}/\text{g}$:

$$Q = m \cdot \lambda_f = 1 \text{ kg} \cdot 79{,}7 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 10^3 \text{ g} \cdot 79{,}7 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 79.700 \text{ cal}$$

5.3 | Stato gassoso

5.3.1 | Gas perfetti

È *perfetto* (o *ideale*) un gas che soddisfa le seguenti condizioni:

- le particelle che costituiscono il gas sono puntiformi;
- fra le particelle non esistono interazioni a distanza;
- gli urti tra le particelle sono elastici.

I gas perfetti ubbidiscono alle seguenti leggi sperimentali:

- legge di **Boyle** $\xrightarrow{t = \text{costante}}$ $P \cdot V = \text{costante}$
- legge di **Charles** $\xrightarrow{P = \text{costante}}$ $V_t = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t)$
- legge di **Gay-Lussac** $\xrightarrow{V = \text{costante}}$ $P_t = P_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t)$

dove $\alpha = 1/273{,}15 \text{ °C}^{-1}$; t è la temperatura espressa in °C; V_0 e P_0 sono rispettivamente il volume e la pressione del gas quando $t = 0$ °C. Se la temperatura viene misurata in kelvin, la legge di Charles e quella di Gay-Lussac assumono la forma:

- legge di **Charles** $\xrightarrow{P = \text{costante}}$ $V_T = \alpha \cdot V_0 \cdot T$
- legge di **Gay-Lussac** $\xrightarrow{V = \text{costante}}$ $P_T = \alpha \cdot P_0 \cdot T$

Le leggi viste si riassumono nell'**equazione di stato dei gas perfetti** (o **legge di Clapeyron**) che lega tra loro i valori delle funzioni di stato di un gas perfetto:

$$P \cdot V = n \cdot \mathrm{R} \cdot T$$

dove:

- T è la temperatura espressa in kelvin;
- n è il numero di moli (nei problemi riguardanti i gas perfetti, la quantità di gas in esame viene in generale data come *numero di moli*);
- R è la **costante di stato dei gas perfetti** e ha un valore pari a:

$$\mathrm{R} = 8{,}318 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K} \cdot \mathrm{mole}} = 0{,}082 \ \frac{\mathrm{litri} \cdot \mathrm{atm}}{\mathrm{K} \cdot \mathrm{mole}}$$

Qual è il numero di moli di un gas perfetto contenuto in un recipiente di volume V = 200 l, a pressione P = 1 atm e temperatura T = 27 °C?

Si deve invertire la legge dei gas perfetti:

$$P \cdot V = n \cdot \mathrm{R} \cdot T$$

facendo attenzione a portare la temperatura in kelvin!

Si ottiene così:

$$n = \frac{PV}{\mathrm{R}T} = \frac{1 \text{ atm} \cdot 200 \text{ litri}}{0{,}082 \ \frac{\mathrm{litri} \cdot \mathrm{atm}}{\mathrm{K} \cdot \mathrm{mole}} \cdot (27 + 273) \text{ K}} = 8{,}13 \text{ mol}$$

Un cilindro con un pistone contiene n moli di un gas perfetto alla temperatura T. Se la temperatura raddoppia, quale sarà il numero di moli finale?

Il numero n di moli di gas contenute nel cilindro è determinato unicamente dal numero di molecole del gas: anche se la temperatura, il volume o la pressione del gas cambiano, n rimane sempre lo stesso.

Un recipiente chiuso contiene un gas perfetto a temperatura T e pressione P. Se la temperatura raddoppia, quale sarà la pressione finale?

Si risolve l'esercizio con un *procedimento generale*, utile per tutti gli esercizi di questo tipo: considerando la relazione $P \cdot V = n \cdot \mathrm{R} \cdot T$, si portano a sinistra dell'uguale tutte le grandezze variabili, e a destra tutte quelle costanti. Il numero di moli, R e il volume sono costanti (il recipiente è chiuso), mentre temperatura e pressione variano.

Dunque:

$$\frac{P}{T} = \frac{n \cdot \mathrm{R}}{V} = \text{cost}$$

Questo significa che nello "stato" iniziale e finale descritto nell'esercizio, il rapporto P/T resta costante. Indicando con 1 lo stato iniziale e 2 quello finale, si può scrivere allora:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

Delle quattro grandezze indicate, si conoscono $T_1 = T$, $T_2 = 2T$, $P_1 = P$. Si trova l'incognita P_2 invertendo l'equazione:

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \ \Rightarrow \ P_2 = P_1 \cdot \frac{T_2}{T_1} = P \cdot \frac{2T}{T} = 2P$$

Da questo si ricava che anche la pressione raddoppia.

Si noti dal punto di vista dimensionale che, correttamente, nella formula risolutiva $P_2 = P_1(T_2/T_1)$, la pressione a destra dell'uguale, moltiplicata per una quantità adimensionale, dà un'altra pressione.

 © Alpha Test

Legge di Avogadro. Volumi uguali di gas diversi nelle stesse condizioni di pressione e temperatura contengono un *ugual numero di molecole*.
Alla temperatura $T = 0\,°C = 273{,}15\,K$ e alla pressione $P = 1\,atm = 760\,mmHg$ (dette condizioni standard) una mole di qualunque gas occupa un volume di 22,4 litri e contiene $6{,}022 \cdot 10^{23}$ molecole (**numero di Avogadro**, indicato con N_A).

Data una miscela di gas, la *pressione parziale* di ciascun gas della miscela è uguale alla pressione che quel gas eserciterebbe se occupasse da solo il volume occupato dall'intera miscela gassosa.

Legge di Dalton. Indicando con P_q la pressione parziale del gas q-esimo si ha:

$$P_1 = P \cdot \frac{n_1}{n};\ P_2 = P \cdot \frac{n_2}{n};\ \ldots;\ P_q = P \cdot \frac{n_q}{n}$$

dove n_q/n rappresenta la *frazione molare* del gas q-esimo e P rappresenta la pressione totale della miscela. La pressione di una miscela gassosa è dunque uguale alla somma delle pressioni parziali dei singoli componenti.

5.3.2 | Cenni di teoria cinetica dei gas

La pressione di un gas è determinata dagli urti delle singole molecole del gas contro le pareti del recipiente che lo contiene. La temperatura di un gas è l'espressione macroscopica dell'agitazione delle molecole del gas chiamata *agitazione termica*. Tra la temperatura T di un gas e l'*energia cinetica media* $\bar{E}_k$ delle sue molecole vi è una relazione di *proporzionalità diretta*:

$$\bar{E}_k = \frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}KT \qquad [8]$$

dove:

- T è la temperatura espressa in kelvin;
- $K = R/N_A = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,J/K$ è la costante di Boltzmann (con N_A numero di Avogadro e R costante dei gas);
- la "barra" sulle grandezze energia e velocità al quadrato indica il loro valore medio.

Poiché l'energia cinetica è definita come prodotto di quantità mai negative (massa e velocità al quadrato), la [8] è in accordo con il fatto che la temperatura kelvin non può essere negativa: un suo valore negativo corrisponderebbe infatti a un'energia cinetica negativa. Si ricava inoltre che, fornendo calore a una sostanza, le sue molecole acquistano energia cinetica: vibrano quindi più velocemente e possono così vincere anche le forze di coesione che le tengono unite e che determinano lo stato di aggregazione. A parità di temperatura, le molecole più leggere (meno massive) si agitano con velocità maggiori di quelle più pesanti; è anche per questo motivo che sostanze diverse che si trovano alla stessa temperatura possono avere stati di aggregazione differenti.

5.3.3 | Gas reali

I gas reali, a differenza dei gas ideali, soddisfano almeno una delle seguenti condizioni:

- sensibili interazioni tra le molecole;
- urti non perfettamente elastici;
- volume proprio delle particelle (*covolume*) non trascurabile.

Per i gas reali l'equazione di stato $P \cdot V = n \cdot R \cdot T$ è sostituita dall'**equazione di Van der Waals**:

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right) \cdot (V - nb) = n \cdot R \cdot T$$

dove b è il covolume e a tiene conto delle interazioni tra le molecole.
Si tratta di una legge empirica (ricavata sperimentalmente); i parametri a e b sono fortemente variabili in relazione al tipo di gas che si considera.

5.4 | Stato liquido

Nei liquidi, contrariamente a quanto accade per i gas, le molecole sono condizionate dalle forze di attrazione intermolecolari che le tengono le une vicine alle altre. I liquidi hanno le seguenti proprietà:

- occupano un volume proprio;
- sono incomprimibili;
- come gli aeriformi, non hanno forma propria e diffondono[1];
- sono dotati di tensione superficiale (si veda § 5.4.2).

5.4.1 | Evaporazione ed ebollizione

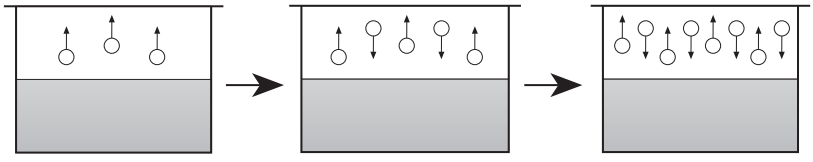
La *vaporizzazione* di un liquido si divide in *evaporazione* ed *ebollizione* a seconda che il passaggio di stato coinvolga solo la parte superficiale o l'intera massa del liquido.

L'energia cinetica media delle molecole di un liquido è proporzionale alla temperatura assoluta del liquido. A causa dell'agitazione termica, alcune molecole in prossimità della superficie del liquido possono acquistare un'energia leggermente superiore alla media, sufficiente a spezzare i legami che le tengono unite al liquido. Tali molecole possono quindi sfuggire al liquido e passare allo stato aeriforme. È questo il fenomeno dell'**evaporazione**. Nella fase aeriforme che sovrasta un liquido, si trovano sempre delle molecole di liquido evaporate. Tali molecole formano il **vapore**.

Vapore: parte dell'aeriforme che sovrasta un liquido.
Fase: stato di aggregazione della materia.
Sistema liquido-vapore: *sistema bifasico*.

Si consideri un liquido in un recipiente chiuso, all'interno del quale è stato praticato il vuoto: alcune molecole del liquido sfuggono ai legami con le altre molecole e passano allo stato di vapore incrementandone il contenuto e quindi la pressione. Contemporaneamente alcune molecole del vapore passano allo stato liquido. Questo fenomeno continua fino al raggiungimento dell'equilibrio tra le due fasi, cioè fino a quando il numero di molecole che passano allo stato di vapore nell'unità di tempo è uguale al numero di molecole che passano allo stato liquido sempre nell'unità di tempo.

L'equilibrio liquido-vapore è dinamico.



Evoluzione temporale di un sistema liquido-vapore: in (a) il numero di molecole che passano allo stato di vapore è decisamente maggiore del numero di molecole che passano da vapore a liquido; in (c) i due numeri sono uguali e il sistema è in equilibrio.

All'equilibrio il vapore si dice **saturo**. La **tensione di vapore** di un liquido a una data temperatura è la pressione del vapore saturo a quella temperatura.

La tensione di vapore dipende solo dalla temperatura e dalla natura del liquido: aumenta con l'aumentare della temperatura.
Il punto di ebollizione di un liquido è la temperatura alla quale la tensione di vapore del liquido è pari al valore della pressione della fase gassosa che sovrasta il liquido (pressione esterna).

Nell'ebollizione, diversamente da quanto accade nell'evaporazione, si ha formazione di vapore in tutta la massa liquida.

1. La diffusione consiste nel fatto che le molecole di due fluidi apparentemente in quiete posti nello stesso recipiente si mescolano spontaneamente le une con le altre.

© Alpha Test

La **temperatura di ebollizione di un liquido** dipende solo dalla natura del liquido e dalla pressione a cui è sottoposto: **cresce al crescere della pressione esterna.**

Nella pentola a pressione vengono raggiunte pressioni superiori a quella atmosferica e la temperatura di ebollizione dell'acqua è maggiore di 100 °C.
Infatti, maggiore è la pressione esterna, maggiore deve essere la tensione di vapore perché abbia inizio l'ebollizione e ciò si realizza con un aumento di temperatura.
In montagna, al contrario, la pressione esterna è inferiore a 1 atm e quindi la temperatura di ebollizione è minore di 100 °C.

5.4.2 | Tensione superficiale

Lo strato superficiale di un liquido si trova in una condizione diversa rispetto al liquido rimanente: le molecole in superficie non sono completamente circondate da molecole uguali a loro. Le molecole interne subiscono l'attrazione delle altre in tutte le direzioni, mentre quelle sulla superficie interagiscono solo con le molecole sottostanti. Questo causa una "contrazione" dello strato superficiale, che tende a comportarsi come una *pellicola elastica*.

Grazie al fenomeno della tensione superficiale, alcuni insetti riescono a muoversi sugli specchi d'acqua senza affondare. Per lo stesso motivo è possibile appoggiare un ago sulla superficie di un liquido senza che esso affondi.

5.5 | Stato solido

Le proprietà che caratterizzano i solidi esistenti in natura si possono riassumere in:

- **elasticità**: proprietà di riprendere forma e volume iniziali dopo una deformazione;
- **durezza**: proprietà di intaccare o scolpire un altro corpo;
- **malleabilità**: proprietà di ridursi in fogli sottili;
- **duttilità**: proprietà di ridursi in fili sottili;
- **tenacità**: resistenza alla rottura;
- **plasticità**: proprietà di modellarsi sotto l'azione di una forza che agisce per un tempo lungo.

Un solido è tale se dotato di *reticolo cristallino*. Il vetro (che non è un solido perché non ha una struttura cristallina) viene chiamato *solido amorfo* in virtù della sua consistenza.

Si distinguono quattro tipi di solidi a seconda del tipo di legame che li caratterizza.

- **Solidi covalenti**: i nodi reticolari sono occupati da atomi legati fra loro con legami covalenti. Sono durissimi, hanno una elevata temperatura di fusione e sono pessimi conduttori.

  C (diamante) e SiO_2 (silice) sono solidi covalenti.

- **Solidi ionici**: i nodi reticolari sono occupati da ioni e i legami sono ionici. Sono duri ma fragili, hanno una elevata temperatura di fusione e sono cattivi conduttori.

  Il cloruro di sodio (NaCl) è un solido ionico la cui temperatura di fusione vale 800 °C.

- **Solidi molecolari**: i nodi reticolari sono occupati da molecole legate fra loro da legami deboli (dipolari, idrogeno). Sono teneri, hanno una bassa temperatura di fusione e non sono buoni conduttori.

  N_2, H_2O, N_2H_4 e I_2 sono solidi molecolari.

- **Solidi metallici**: un metallo può essere visto come un reticolo di ioni positivi immerso in una nube di elettroni in movimento. Sono lucenti e malleabili (il legame metallico è adirezionale) e hanno una buona conducibilità elettrica e termica (dovuta all'ottima mobilità degli elettroni).

  Fe, Ag e Cu sono solidi metallici.

Quesiti svolti

1 **Un recipiente a forma cubica di lato 1 dm è riempito per metà del suo volume di acqua. Le condizioni esterne sono tali da produrre un'evaporazione dell'acqua di 1 g/h . Dopo 10 h il livello dell'acqua:**

A è rimasto costante
B è sceso di 1 mm
C è sceso di 10 mm
D è salito di 1 mm
E è ridotto a zero

Il tasso di evaporazione dell'acqua, costante, è di $1\ \text{g/h}$. Dopo 10 h sarà evaporata una massa d'acqua $m = 1\ \frac{\text{g}}{\text{h}} \cdot 10\ \text{h} = 10\ \text{g}$. Conoscendo la densità dell'acqua, che vale $\rho = 1\ \text{g/cm}^3$, e ricordando la definizione di densità, si può ricavare il volume dell'acqua che evapora:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{\rho} = \frac{10\ \text{g}}{1\ \text{g/cm}^3} = 10\ \text{cm}^3$$

Il problema chiede tuttavia la variazione del livello dell'acqua, ovvero dell'altezza *H* del parallelepipedo di base quadrata e lato *l* pari a 1 dm, contenente il volume d'acqua che evapora. Per trovare *H* si deve dividere il volume per l'area di base *A* (avendo cura di trasformare il lato in centimetri, dato che la densità è espressa in grammi su centimetro cubo):

$$H = \frac{V}{A} = \frac{V}{l^2} = \frac{10\ \text{cm}^3}{(10\ \text{cm})^2} = 0{,}1\ \text{cm} = 1\ \text{mm}$$

La risposta corretta è la **B**.

Si osservi che, se l'acqua evapora, il suo livello *scende*: in un problema di questo tipo, le alternative valide si potevano ridurre a due (la **B** e la **C**) a colpo d'occhio.

2 **Il candidato immagini di dividere una pressione (al numeratore) per una forza (al denominatore). Cosa ottiene come risultato?**

A Una superficie
B Il reciproco di una superficie
C Una lunghezza
D Una potenza
E Un'energia

È sufficiente ricordare la relazione che lega la pressione *P* alla forza *F* che agisce su una superficie *A*:

$$P = \frac{F}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{P}{F} = \frac{1}{A}$$

Si deduce che la risposta corretta è la **B**.

© Alpha Test

3 **Quale dei seguenti gruppi contiene solo unità di misura della grandezza *pressione*?**

A Chilojoule, chilowattora, chilowatt, chilopascal
B Millilitro, millipascal, millijoule, milliwatt
C Pascal, centimetro d'acqua, watt, atmosfera
D Pascal, newton/(metro quadro), bar, ettopascal
E Millimetro di mercurio, pascal, watt, atmosfera

Pascal, newton/(metro quadro), bar ed ettopascal sono tutte unità di misura della pressione: la risposta esatta è dunque la **D**.

4 **La pressione di 1 atmosfera è:**

A qualunque pressione che si registra al livello del mare
B quella esercitata da una colonna d'acqua alta 76 m
C la pressione registrata a 760 m al di sopra del livello del mare
D la pressione esercitata da una colonna di mercurio alta 76 cm
E la pressione registrata a 76 m di profondità al di sotto della superficie del mare

L'unità di misura "atmosfera" non è un'unità di misura del SI. Essa è legata al pascal e ad altre unità di misura non del SI tramite le relazioni:

$$1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg} = 1{,}01325 \text{ bar} = 101.325 \text{ Pa} \approx 10^5 \text{ Pa} = 10^5 \text{ N/m}^2$$

dove la scrittura mmHg sta per "millimetri di mercurio". La pressione di 1 atm è infatti quella registrata alla base di una colonna di mercurio alta 760 mm o, equivalentemente, 76 cm (risposta **D**).

5 **Il corpo umano, normalmente, ha una temperatura di circa 37 °C. In kelvin tale temperatura vale circa:**

A – 273 K B 90 K C 300 K D 273 K E 310 K

Tra i gradi celsius (°C) e i kelvin (K) vale la relazione:

$$K = °C + 273.$$

Quindi 37 °C corrispondono a (37 + 273) K = 310 K (risposta **E**).

6 **In fisica la parola "sublimazione" indica il passaggio dallo stato:**

A liquido a solido
B solido a liquido
C solido a gassoso
D gassoso a solido
E gassoso a liquido

La sublimazione è il passaggio di stato da solido a gassoso (risposta **C**). Esempi di sublimazioni evidenti sono quelli offerti dal ghiaccio secco e dalla naftalina.

7 **Quando due volumi uguali di gas perfetti diversi possono contenere lo stesso numero di molecole?**

A Quando hanno uguale pressione e temperatura diversa
B Quando hanno uguale temperatura e pressione diversa
C Sempre alla pressione di 1 bar
D Sempre alla temperatura di zero gradi celsius
E Quando hanno uguale pressione e uguale temperatura

Per l'equazione di stato dei gas perfetti, due volumi uguali di gas diversi alla stessa pressione e alla stessa temperatura contengono lo stesso numero di moli e quindi lo stesso numero di molecole: la risposta esatta è dunque la **E**.

---

8 **L'aria è formata per l'80% (circa) da azoto e per il 20% (circa) da ossigeno: la sua pressione al livello del mare è pari a una atmosfera. In questa miscela gassosa:**

A le pressioni parziali dei due gas sono uguali e ciascuna è pari a una atmosfera

B la pressione parziale dell'azoto è minore di quella dell'ossigeno

C non si può parlare di pressione dell'ossigeno e dell'azoto, ma di pressione della miscela

D la pressione parziale dell'azoto è circa quattro volte quella dell'ossigeno

E le pressioni parziali dei due gas sono uguali e ciascuna è pari a 0,5 atmosfere

Per la legge di Dalton, la pressione parziale di un gas in una miscela è proporzionale alla frazione molare dello stesso gas nella miscela.

L'azoto è presente nell'aria in una percentuale quattro volte superiore all'ossigeno: la sua pressione parziale è perciò quattro volte quella dell'ossigeno (risposta **D**).

---

9 **La massa di ossigeno (peso molecolare = 32) contenuta in un volume di 10 dm^3 alla temperatura di 27 °C e alla pressione di 30 atm è pari a circa (si assuma come costante dei gas R = 0,082 (litri · atm)/(K · mole)):**

A 12,2 g **B** 320 g **C** 4336 g **D** 390 g **E** 32 kg

Dall'equazione di stato dei gas perfetti si ricava che il numero di moli di ossigeno è pari a:

$$n = \frac{P \cdot V}{R \cdot T} = \frac{30 \text{ atm} \cdot 10 \text{ litri}}{0{,}082 \dfrac{\text{litri} \cdot \text{atm}}{\text{K} \cdot \text{mole}} \cdot 300 \text{ K}} \approx 12{,}2 \text{ moli}$$

Poiché ogni mole di ossigeno ha una massa pari a 32 g, la massa totale di ossigeno è data da: $m = 12{,}2 \text{ moli} \cdot 32 \text{ g/mole} \approx 390 \text{ g}$. La risposta esatta è quindi la **D**.

---

10 **Un gas perfetto è racchiuso in un cilindro e mantenuto a temperatura costante *T*. Se il suo volume viene fatto espandere lentamente fino a raggiungere il doppio del valore iniziale:**

A anche la pressione esercitata dal gas raddoppia

B la pressione esercitata dal gas resta costante

C la pressione esercitata dal gas si dimezza

D la temperatura interna aumenta

E la temperatura interna diminuisce

Un gas perfetto sottoposto alla trasformazione descritta nel problema (espansione isoterma) verifica la legge di Boyle ($P \cdot V = \text{costante}$). Si arriva a questa legge anche a partire dalla legge dei gas perfetti, osservando che a membro destro, dato che T è costante nella trasformazione, si ha una costante:

$$PV = nRT = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad P_1V_1 = P_2V_2$$

Isolando la pressione finale P_2 (si noti che l'espressione per P_2 è dimensionalmente corretta) e sostituendo il valore del volume finale si ha:

$$P_2 = P_1 \cdot \frac{V_1}{V_2} = P_1 \cdot \frac{V_1}{2V_1} = \frac{P_1}{2}$$

La pressione finale è dimezzata rispetto a quella iniziale: la risposta corretta è la **C**.

© Alpha Test

11 L'igrometro è uno strumento che serve per misurare:

A la temperatura

B la pressione

C l'umidità

D la piovosità

E la carica elettrica

L'umidità dell'aria è la quantità di vapor d'acqua contenuta nell'aria.

- *Umidità assoluta*: grammi di vapor d'acqua contenuti in un metro cubo d'aria (si misura in g/m^3).
- *Umidità relativa*: rapporto tra umidità assoluta e umidità in condizioni di saturazione (a parità di temperatura); è un numero puro sempre minore di uno e può anche essere espressa in percentuale. Se l'umidità relativa dell'aria è pari al 100% l'aria è satura di vapor d'acqua.

L'igrometro è uno strumento usato per misurare l'umidità (risposta **C**).

12 Il pendolo di un orologio è realizzato interamente in acciaio ed è stato tarato in modo che l'orologio funzioni esattamente in un ambiente con temperatura di 20 °C. Che cosa si può dire del comportamento dell'orologio se la temperatura ambiente sale a 25 °C?

A non cambia nulla

B non si può dire nulla

C il comportamento dipende dalla lunghezza del pendolo a 20 °C

D l'orologio va avanti

E l'orologio resta indietro

All'aumentare della temperatura, l'acciaio con cui è stato costruito il pendolo si dilata. La lunghezza L del pendolo aumenta e quindi aumenta anche il suo periodo essendo pari a:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{L/g}$$

Il pendolo impiega così un tempo maggiore per compiere un'oscillazione completa e l'orologio resta indietro (risposta **E**).

13 Un recipiente rigido contiene un gas ideale a una data pressione. Un aumento di temperatura del gas provoca:

A nessun effetto

B una diminuzione di densità

C un aumento di pressione

D effetti diversi in diverse ore del giorno

E la liquefazione del gas

Un gas ideale è descritto da quattro grandezze fisiche: il numero di moli n (che indica la quantità di materia di cui è costituito), il volume V, la pressione P e la temperatura T.

Poiché il gas in questo caso è confinato all'interno di un recipiente rigido e il numero di moli non può variare, il volume V e il numero di moli n sono costanti. Il gas segue quindi la legge di Gay-Lussac: una variazione di temperatura ΔT provoca una analoga variazione di pressione ΔP direttamente proporzionale alla variazione di temperatura.

Aumentando la temperatura aumenterà pertanto anche la pressione (risposta **C**).

14 Quando la tensione di vapore diventa uguale alla pressione esterna, un liquido:

A smette di evaporare
B bolle
C congela
D si raffredda
E è alla temperatura critica

Riscaldando un liquido, la tensione di vapore aumenta; quando questa diventa uguale alla pressione esterna il liquido bolle; risposta B. Viene detta *temperatura di ebollizione* la temperatura alla quale la tensione di vapore di un liquido raggiunge la pressione esterna; in queste condizioni la fase liquida e la fase gassosa di una sostanza coesistono in equilibrio.

© Alpha Test